

1. AZ ÁLLAPOTEGYENLET AZ ASZTROFIZIKÁBAN

1.1 FENOMENOLOGIKUS TERMODINAMIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

ALAPFOGALMAK A fenomenologikus termodinamika a többváltozós függvénytan egy speciális fejezete, melyet csak elsődlegesen fizikai alkalmazása okán tekintenek hagyományosan a fizika részének. Tárgyát olyan “dolgok” (matematikai szóhasználat: “halmazok”; fizikai szóhasználat: “rendszerek”) képezik, melyekhez M darab pozitív valós számot rendelünk. Ezen $\{x_i\}_{i=1}^M$ szám- M -es adja meg a rendszer *egyensúlyi állapotát*. Az x_i -ket *extenzív állapotjelzőknek* nevezzük, mivel két rendszert (gondolatban vagy ténylegesen) egyesítve (két halmaz unióját képezve) összeadódnak:

$$x_i^{(A \cup B)} = x_i^{(A)} + x_i^{(B)}$$

Az x_i állapotjelzők értéke (s általában a rendszer állapota) a $t \in \mathfrak{R}$ időparaméter függvényében változhat. Ez a változás csak úgy történhet, hogy a rendszerek extenzív mennyiségeiket egymás között kicserélik, azaz átadják egymásnak x_i -jeik egy részét. Ha két rendszer között ez a csere megengedett, azt mondjuk, hogy a rendszerek egymással *kölcsönhatásban állnak*; ellenkező esetben (az i -edik kölcsönhatás szempontjából) *elszigeteltek*. Minden más rendszertől elszigetelt rendszer a *zárt rendszer*. Zárt rendszerre az x_i -k nem változnak, azaz *megmaradó mennyiségek*.

Két rendszer az i -edik kölcsönhatás szempontjából *egyensúlyban van*, ha, bár kölcsönhatásban állnak, x_i -átadás mégsem történik közöttük. Az egyensúly fogalma egyetlen rendszerre is értelmezhető: egy rendszer egyensúlyban van, ha bárhogyan is bontjuk azt részekre, a részek egymással egyensúlyban vannak. Definíciójából következően az egyensúly szimmetrikus reláció (hiszen két rendszer *egymással* van egyensúlyban); továbbá reflexív is, mivel két azonos állapotú rendszer közül szimmetriaokokból egyik sem adhat át a másiknak x_i -ket. Most *posztuláljuk* az egyensúly egy további fontos tulajdonságát:

\Rightarrow **A termodinamika 0. főtétele: Az egyensúly tranzitív**, azaz ha A és B egyensúlyban vannak, továbbá B és C is egyensúlyban vannak, akkor A és C is egyensúlyban vannak.

Ha az egyensúly reflexív, szimmetrikus és tranzitív reláció, *ábrázolhatjuk* azt az egyenlőséggel, mely szintén ilyen reláció. Tehát a rendszer minden kölcsönhatásához rendelhető egy, az állapottól függő

$$y_i = f(x_1, \dots, x_M) \quad (1.1)$$

valós szám oly módon, hogy a rendszerek egyensúlyát ezen ún. intenzív állapotjelzők egyenlősége reprezentálja. A (1.1) relációkat *állapotegyenleteknek* szokás nevezni, bár voltaképpen helyesebb volna a “fázisegyenletek” megjelölés, mivel a különböző alakú állapotegyenletek az anyag különböző fázisait jellemzik. Könnyen belátható, hogy az intenzív állapotjelzők közül csak $M - 1$ független.

A bizonyítás a következőképpen történik. Nyilvánvaló (hiszen ha A , B és C azonos állapotú rendszerek, akkor $A B \cup C$ -vel is egyensúlyban van), hogy az (1.1) relációk homogén nulladrendű függvények, azaz

$$y_i = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_M)$$

is teljesül. Így Euler tétele szerint

$$\sum_j \partial y_i / \partial x_j = 0$$

Ezen egyenletrendszernek akkor van nemtriviális megoldása, ha determinánsa zérus. Ez a determináns pedig éppen a

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_M)}{\partial(x_1, \dots, x_M)} = 0 \quad (1.2)$$

Jacobi-determináns. A (1.2) összefüggés szerint tehát az y_i -k nem függetlenek egymástól.

Ezek szerint a (1.1) relációkból egy kivételével akár valamennyi extenzív mennyiséget kiküszöbölhetjük, s **az intenzív állapotjelzőket egymással és egy extenzívvel fejezhetjük ki. Ez az állapotegyenlet szokásos alakja.**

A továbbiakban az általánosság lényeges korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az (1.1) függvények szigorúan monotonak, s deriváltjuk véges. (A fizikailag érdekes alkalmazásokban általában ez a helyzet.) Ekkor könnyű belátni, hogy egyfázisú egyensúlyi rendszer szükségképpen *homogén*, azaz belőle tetszőleges A és B részrendszert kiválasztva $x_1^{(A)} : x_1^{(B)} = \dots = x_M^{(A)} : x_M^{(B)} = \lambda$.

Bizonyítás: A rögzített állapotát az M dimenziós állapotterben egy pont reprezentálja. B ezzel egyensúlyban levő állapotai azok, melyek az állapotterben valamennyi intenzív mennyiség közönféléületén fekszenek. Mivel az intenzívek közül $M-1$ darab független, ez az altér $M-(M-1) = 1$ dimenziós. De az $\{\lambda x_i^{(A)}\}_{i=1}^M$ állapotú rendszerek bizonyosan egyensúlyban vannak A -val (hiszen ezek λ darab A rendszer unióját jelentik), így ez az egyparaméteres sokaság szükségképpen meg kell egyezzen a keresett egyparaméteres sokasággal.

ENTRÓPIA ÉS FŐTÉTELEK Mint már az eddgiekből is kitetszik, a fenomenologikus termodinamika pusztán absztrakt keret, üres "ruha", amit majd a konkrét fizikai alkalmazásokra ráhúzhatunk. Hogy a későbbi alkalmazáshoz igazodva, a képleteket ismerősebb formában írassuk, már itt megelőlegezzük, hogy később az extenzív állapotjelzőket az E (belső) energiával, a V térfogattal, és a különböző fajta részecskék N_i számával ($i = 1..(M-2)$) fogjuk azonosítani. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az $M = 3$ esetre (egyféle, vagy mereven rögzített számarányú részecskék) koncentrálunk, így extenzív állapotjelzőink E , V és N . (A továbbiak az általános esetre könnyen kiterjeszthetők.)

Az x_i -k fenti fizikai azonosítását fejezi ki
 \Rightarrow **A termodinamika első főtétele:** E , V és N az extenzív állapotjelzők, azaz megmaradnak (értékük zárt rendszerre nézve állandó), s egyensúly esetén a rendszer állapotát egyértelműen meghatározzák. Mivel a térfogat és a részecskeszám megmaradása triviális, az első főtétele lényegében tehát az energia megmaradását fejezi ki, továbbá azt, hogy az energián kívül más független nemtriviális megmaradó mennyiség a termodinamikában nem játszik szerepet.

Vezessünk most be egy további extenzív mennyiséget, az S *entrópiát*. Mivel az egyensúlyi állapot homogén, így zárt egyensúlyi rendszer állapotát az x_i -k egyértelműen meghatározzák (azaz minden részrendszer állapotát is megadják). Ezek szerint pedig egyensúlyi rendszerben bármely további, a rendszert jellemző extenzív mennyiség az x_i -k függvényeként áll elő. (Ui. a független állapotjelzők M számát éppen úgy vesszük fel, hogy ez teljesüljön.) Tehát egyensúlyi rendszerekre

$$S = f(x_1, \dots, x_M) \quad (1.3)$$

Mivel S extenzív, f homogén lineáris függvény ($\lambda S = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_M)$), hiszen az egyensúlyi állapot homogenitása miatt ez a feltétel ekvivalens az extenzivitás követelményével. Megköveteljük még, hogy f legyen legalább kétszer folytonosan differenciálható, és minden változója szerint egyértelműen invertálható (azaz szigorúan monoton).

Figyelem: a (1.3) függvénykapcsolat nem tekinthető általában véve az entrópia definíciójának, hiszen ilyen kapcsolat léte csak egyensúlyi rendszerek esetében garantált. Ha az A és B rendszerek önmagukban egyensúlyiak, ám egymással nem állnak egyensúlyban, akkor az entrópia extenzivitása miatt a belőlük álló egyesített rendszer entrópiája $S^{(A)} + S^{(B)}$, ami általában nem fejezhető ki a (1.3) alakban. (Az $A \cup B$ rendszer belső inhomogenitása miatt állapotát a globális $x_i^{(A \cup B)}$ extenzív mennyiségek nem írják le egyértelműen.) A (1.3) kifejezés csak az entrópia *egyensúlyi* értékét adja meg. A nemegyensúlyi rendszerekre egy külön posztulátum vonatkozik:

\Rightarrow A termodinamika második főtétele: Zárt rendszer entrópiája egyensúly esetén maximális. Zárt nemegyensúlyi rendszerre pedig az entrópia monoton nő, vagyis a rendszer egyensúlyhoz tart.

A második főtétel lehetővé teszi, hogy kapcsolatot találjunk az (1.3) fundamentális függvény és az intenzív mennyiségek kifejezése (az állapotegyenlet) között. Ha ugyanis az $A \cup B$ zárt rendszert alkotó A és B rendszerek egyensúlyban vannak, akkor ezt az egyensúlyt kis mértékben megzavarva $dx_i^{(A)} = -dx_i^{(B)}$, és így

$$dS^{(A \cup B)} = dS^{(A)} + dS^{(B)} = \sum_i \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^{(A)} dx_i^{(A)} + \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^{(B)} dx_i^{(B)} \right] = \sum_i \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^{(A)} - \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^{(B)} \right] dx_i^{(A)}$$

De az egyensúly $A \cup B$ entrópiájának szélsőértéke, így $\partial S^{(A \cup B)} / \partial x_i = 0$. Ezt a fentivel egybevetve az egyensúly feltétele az entrópiafüggvény parciális deriváltjainak egyenlősége, s így e deriváltakat választhatjuk intenzív mennyiségeknek! (Megmutatható egyébként az is, hogy e választás egy, a mértékegységnek megfelelő konstans faktortól eltekintve az egyetlen konzisztens választás.)

Egyensúly esetén tehát

$$S = S(E, V, N), \quad (1.4)$$

amit a függvény invertálhatósága miatt

$$E = E(S, V, N) \quad (1.5)$$

alakban is írhatunk. Ennek teljes differenciálja

$$\boxed{dE = T dS - P dV + \hat{\mu} dN} \quad (1.6)$$

ahol

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V, N} \quad P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S, N} \quad \hat{\mu} = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, V} \quad (1.7)$$

a hőmérséklet, nyomás és kémiai potenciál definíciója, melyek tehát az egyes kölcsönhatásokhoz tartozó intenzív mennyiségek. A nekik megfelelő kölcsönhatások rendre a termikus, mechanikai és kémiai kölcsönhatások. (1.6) fizikai jelentése az, hogy az energiaváltozás a

hőhatás (termikus kölcsönhatás), valamint a mechanikai és anyagi kölcsönhatás eredménye, így a hőhatás figyelembevételével az energia megmarad. (1.6) így az első főtétel kifejezésének is tekinthető.

Az $E(S, V, N)$ fundamentális függvény homogén lineáris volta miatt az Euler-tétel szerint

$$E = TS - PV + \hat{\mu}N \quad (1.8)$$

Ennek teljes differenciáljából (1.6)-t levonva a *Gibbs–Duhem* relációhoz jutunk:

$$S dT - V dP + N d\hat{\mu} = 0 \quad (1.9)$$

ami ismét csak azt mutatja, hogy az intenzív jellemzők nem mind függetlenek.

Végül a teljesség kedvéért álljon még itt

\Rightarrow **A termodinamika harmadik főtétele: A $T \rightarrow 0$ határátmenetben $S \rightarrow 0$.**

POTENCIÁLOK ÉS ÁLLAPOTMENNYISÉGEK A fenti néhány formula, (1.5–1.9) alapján merő formális gyakorlat az egyensúlyi termodinamika összefüggéseinek levezetése.

Az E energia mellett további energiadimenziójú mennyiségek, ún. *termodinamikai potenciálok* is definiálhatók, így a H *entalpia*, az F *szabad energia* vagy *Helmholtz-potenciál*, és a G *szabad entalpia* vagy *Gibbs-potenciál*:

$$H = E + PV \quad F = E - TS \quad G = E - TS + PV = \hat{\mu}N \quad (1.10)$$

Az asztrofizikában az extenzív mennyiségek *fajlagos*, azaz N -nel vagy $\mu m_H N$ -nel elosztott értékeit szokás többnyire használni. (μm_H az átlagos molekulatömeg, m_H az atomi tömeg egység). Az e , s , v fajlagos mennyiségekkel (1.8), (1.9) és (1.6) az alábbi alakot öltik:

$$e = Ts - Pv + \hat{\mu} \quad s dT - v dP + d\hat{\mu} = 0 \quad de = T ds - P dv \quad (1.11)$$

Tehát a fajlagos energia differenciálja formálisan ugyanolyan alakú, mint rögzített részecskeszám mellett a megfelelő nem fajlagos mennyiségeké. Ez természetes, hiszen a fajlagos mennyiségek jelentése éppen az adott extenzíveknek a (homogén) rendszer fix részecskeszámú kis részére felvett értéke. Így a fajlagos mennyiségek már csak két független változó függvényei. **A továbbiakban a fajlagos extenzív mennyiségeket tekintjük, azonban ezekre továbbra is a nem fajlagos mennyiségek jelölését (nagybetűk) alkalmazzuk:** $E = E(S, V)$ stb. Figyelembe veendő még, hogy a fajtérfogot helyett reciproka, a $\rho = 1/v$ sűrűség is használható.

Így a (fajlagos) termodinamikai potenciálok teljes differenciáljai:

$$\boxed{dE = T dS - P dV} \quad dH = T dS + V dP \quad (1.12)$$

$$dF = -S dT - P dV \quad dG = V dP - S dT$$

Ennek alapján képezve a potenciálok vegyes második deriváltjait, és a Young-tételt felhasználva adódnak az ún. termodinamikai *Maxwell-relációk*:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad (1.13)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S$$

A termodinamikai potenciálok és más extenzív mennyiségek intenzívek szerinti deriváltjai adják az ún. állapotmennyiségeket (ismét csak helyesebb volna a “fázismennyiségek” elnevezés). Így a kétféle fajhő:

$$c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \equiv T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad c_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \equiv T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \quad (1.14)$$

Arányuk a

$$\gamma = c_P/c_V \quad (1.15)$$

fajhőhányados. Az izoterm kompresszibilitás és az izobár hőtágulási együttható pedig

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \quad \alpha_P = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (1.16)$$

ezek helyett néha dimenziótlan alakjukat használjuk:

$$\delta_P = \alpha_P T \quad \delta_T = \chi_T P \quad (1.17)$$

Az asztrofizikában gyakran előforduló dimenziótlan állapotmennyiségek még

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{P}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \quad (1.18)$$

valamint a Chandrasekhar-féle *adiabatikus kitevők*:

$$\Gamma_1 = \frac{\rho}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \quad \Gamma_2 = \left[1 - \frac{P}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \right]^{-1} \quad \Gamma_3 = 1 + \frac{\rho}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_S \quad (1.19)$$

A fentiekből nyilvánvaló, hogy

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \frac{\Gamma_3 - 1}{\Gamma_1} \quad (1.20)$$

és hogy Γ_1^{-1} nem más, mint a dimenziótlan adiabatikus kompresszibilitás, $(1 - \Gamma_3)^{-1}$ pedig a dimenziótlan adiabatikus hőtágulási együttható.

A két fajhő különbségére vonatkozólag fennáll az alábbi jól ismert reláció:

$$c_P - c_V = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + P \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{\alpha_P^2 T}{\chi_T \rho} \quad (1.21)$$

Bizonyítás:

$$c_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

de ha független változónak P -t és T -t választjuk, $E(T, P) = E[T, V(P, T)]$, amiből

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_P = \underbrace{\left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V}_{=c_V} + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

AZ ÁLLAPOTEGYENLET Mint e szakasz elején láttuk, az állapotegyenlet az intenzív mennyiségek kifejezése a többi állapotjelző függvényében, melyek között legalább egy extenzív mennyiségnek is kell szerepelnie. Szokásos felírásában valóban csak egy extenzív állapotjelző szerepel, vagyis az állapotegyenlet az intenzív mennyiségek egymás közti kapcsolatát adja meg. Az egyetlen extenzív mennyiség választása szerint az állapotegyenlet felírható pl. $P = P(\rho, T)$, $P = P(E, T)$, $P = P(S, T)$ vagy akár $P = P(H, T)$ alakban. (Több komponensű rendszerben az argumentumban természetesen további változók is felépnek.) Az első esetben **az állapotegyenlet differenciális alakja** a fenti definíciókkal

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha_P dT + \chi_T dP = -\delta_P \frac{dT}{T} + \delta_T \frac{dP}{P}} \quad (1.22)$$

Az állapotegyenlet többi formájának differenciális alakban való felírásához használjuk fel a (1.13) Maxwell-relációk közül a másodikat, melynek jobb oldalát a (1.22) állapotegyenlet segítségével kifejezhetjük az imént definiált állapotmennyiségekkel:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_T = -\frac{\alpha_P}{\chi_T \rho^2}$$

Ezzel az entrópia teljes differenciálja így írható:

$$T dS = c_V dT - \frac{\alpha_P T}{\chi_T \rho^2} d\rho = c_P dT - \frac{\alpha_P T}{\rho} dP \quad (1.23)$$

ahol a második egyenlőség (1.21) és (1.22) felhasználásával adódott. Ugyanígy

$$dH = c_P dT + \frac{1 - \alpha_P T}{\rho} dP \quad (1.24)$$

$$dE = c_V dT + \frac{\chi_T P - \alpha_P T}{\chi_T \rho^2} d\rho \quad (1.25)$$

(1.23)-ből egyébként rögtön következik, hogy

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{\alpha_P P}{c_P \rho} \quad (1.26)$$

Feladat: Írjuk fel az állapotegyenlet $P = P(F, T)$ formájának megfelelő differenciális alakot!

Feladat: Mutassuk meg (1.22) alapján, hogy

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\delta_T - \delta_P \nabla_{\text{ad}}}$$

1.2 STATISZTIKUS TERMODINAMIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

CÉLKITŰZÉS A statisztikus termodinamika a sok szabadsági fokú rendszerek mechanikájának — a *statisztikus mechanikának* — azon ága, amely speciálisan a *gyengén kölcsönható* sok szabadsági fokú rendszerekkel foglalkozik, vagyis az olyan rendszerekkel, melyekben a részecskék között legfeljebb a rendszer (makroszkopikus) méreteinél sokkal

I. táblázat: A statisztikus mechanika főbb területei és összefüggéseik



rövidebb, “mikroszkopikus” hatótávolságú erők hatnak. Az ilyen rendszerek makroszkopikus részei között tehát kölcsönhatási energia nem lép fel, így az energia a részecskeszámhoz és a térfogathoz hasonlóan additív, *extenzív* mennyiség, ami lehetővé fogja tenni a fenomenologikus termodinamika formalizmusának alkalmazását. Az erősen kölcsönható rendszerekkel foglalkozó statisztikus mechanikai területekre (ld. I. táblázat) ez nem áll ugyan, viselkedésük egyes aspektusai mégis hasonlóak a termodinamikai rendszerekével, így az e szakaszban tárgyalandó ismeretek egy része pl. a sztellárdinamikában is hasznosítható.

Szűkebb, általunk is használt értelmében a statisztikus termodinamika csak az *egyensúlyi* (azaz makroszkopikusan stacionárius) rendszereket vizsgálja, míg a nemegyensúlyi rendszerek a *kinetikus elmélet* vagy *kinetikus fizika* tárgyát képezik. Konkrét alkalmazásai szerint mindkét terület tovább osztható; e részterületek közül az asztrofizikában legfontosabb a plazmafizika, amit később külön fejezetben tárgyalunk majd.

A statisztikus mechanika fő törekvése kis számú *makroszkopikus mennyiség* (pl. hőmérséklet) fejlődésének autonóm (saját kezdeti feltételei által meghatározott) leírása. Mivel a rendszer állapotát mikroszkopikus értelemben igen nagy számú paraméter jellemzi, egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy az ilyen leírás egyáltalán lehetséges. Mindazonáltal ha így van, akkor nyilván általában végtelen sok olyan különböző mikroállapota van a rendszernek, amelyhez ugyanaz a makroállapot tartozik. (Pl. a rendszer hőmérséklete nyilván nem változik, ha bármely részecske energiáját kissé megnöveljük, és egy másikét ugyanannyival csökkentjük.) Más szóval **a rendszert makroszkopikusan ugyanolyan rendszerek egy egész sokaságával kell helyettesítenünk**. A sokaságot úgy írjuk le, hogy minden állapotra megadjuk annak valószínűségét, hogy a tényleges rendszer az adott állapotban van. Egy mért mennyiség várható értéke valamely későbbi időpontban pedig a reprezentáns sokaságra vett átlag lesz. Rendszerek és sokaságok ezen megfeleltetését, amely tehát a statisztikus mechanika célkitűzésének egyszerű következménye, néha “a statisztikus mechanika 0. posztulátumának” nevezik.

MIKROKANONIKUS SOKASÁG Álljon a rendszerünk N részecskéből ($N \gg 1$), melyek mindegyikének l szabadsági foka van. (Pontszerű részecskékre $l = 3$.) Ekkor a rendszer állapotának egyértelmű megadásához nyilván $2lN = 6N$ paraméterre van szükség (minden egyes részecske \mathbf{r} helyét és \mathbf{p} impulzusát kell megadnunk). A rendszer állapotainak összessége tehát egy $6N$ -dimenziós tér, az *állapottér* vagy *fázistér* pontjait adja: e teret Γ -val jelöljük. A reprezentáns sokaságot — vagyis a makroállapotot — Γ -n az $f(\Gamma) = f(\mathbf{r}^{(N)}, \mathbf{p}^{(N)}; t)$ *eloszlásfüggvény* adja meg, oly módon, hogy $f d\Gamma$ annak valószínű-

sege, hogy a tényleges rendszert reprezentáló pont a fázistér kis $d\Gamma$ elemében tartózkodik. (Következésképpen f 1-re normált: $\int f d\Gamma = 1$.)

A konkrét rendszer állapotváltozását a fázistérben neki megfelelő pont mozgása reprezentálja, azaz egy görbe, ami a $6N$ -dimenziós állapotter egy egydimenziós altere. Zárt rendszer esetén ez a görbe felfogható úgy is, mint a rendszert jellemző $(6N - 1)$ mozgásállandó értékei által együttesen definiált altér. A mozgásállandók közül azonban makroszkopikusan csak kevés értéke meghatározható: ezeket nevezzük *kontrollálható integráloknak*. A kontrollálható integrálok együttes értékei is egy alacsonyabb (de 1-nél sokkal nagyobb) dimenziószámú alteret, ún. "hiperfelületet" definiálnak a fázistérben: ezt a hiperfelületet a továbbiakban Σ -felületnek fogjuk nevezni. Zárt rendszer esetén így a Σ -felület a makroállapot megfelelője; annak $W(\Sigma)$ mértékét az adott makroállapot *termodinamikai valószínűségének* avagy *statisztikus súlyának* nevezzük. Zárt rendszert reprezentáló sokaság tehát a Σ -felületre korlátozódik, f értéke ezen kívül nulla. Az ilyen sokaságok között kitüntetett szerepe van az ún. *polimikrokanonikus sokaságnak*, melynek értéke Σ -n konstans:

$$f(\Gamma) = \begin{cases} 1/W(\Sigma) & \text{ha } \Gamma \in \Sigma \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (1.27)$$

A makroszkopikus mennyiségek Γ -n értelmezett függvények, melyek mérése mindig véges Δt időre (és ΔV térrészre) való átlagolást jelent. Pl. tartályba zárt gáz nyomásának mérésekor voltaképpen a fal egy kis ΔA elemének kis Δt idő alatt ütköző részecskék által leadott impulzust határozzuk meg. Δt (és ΔA ill. ΔV) makroszkopikusan kicsiny, ugyanakkor a jellemző mikroszkopikus skálákhoz (részecskék falba ütközési gyakorisága ill. távolsága) képest nagyon nagy. A mérés tehát hosszú időtartamra (nagy térrészre) való átlagolást jelent; stacionárius állapotú, egyensúlyi rendszer esetében nyugodtan vehetjük ezt végtelen időre vett átlagnak is. Ha tehát a makroszkopikus mérés alapján nem tudunk különbséget tenni a sokaság egyes rendszerei között, ez azt jelenti, hogy a mérés eredménye nem függhet attól, hogy rendszerünk Σ mely pontjából indult a mérés kezdetekor. Fel kell tehát tételeznünk, hogy a sokaság minden rendszere időfejlődése során bebolyongja az egész Σ -felületet. Feltételezzük továbbá még azt is, hogy e bolyongás során a felület azonos mértékű részeiben átlagban ugyanannyi időt tölt; a statisztikus termodinamikában továbbá azt is, hogy zárt termodinamikai rendszerek esetében az egyetlen kontrollálható integrál az E (belső) energia. Σ így az energia-hiperfelület, az (1.27) által definiált sokaság pedig ez esetben az ún. *mikrokanonikus sokaság*. E feltevéseket összegzi

\Rightarrow A statisztikus termodinamika első posztulátuma: zárt termodinamikai rendszerekre a makroszkopikus mennyiségek időátlaga megegyezik a mikrokanonikus sokaságra vett átlagukkal.

Ez a posztulátum alapozza meg a termodinamika első főtételét, hiszen eszerint a rendszer makroállapotát az N részecskeszám és a V térfogat mellett a (szintén extenzív) E energia egyértelműen meghatározza.

Mivel a végtelen időre vett átlaggal foglalkoztunk, eddigi kijelentéseink nemstacionárius, fejlődő rendszerek leírására nem alkalmasak. A nem egyensúlyi rendszer makroállapota nem jellemezhető a mikrokanonikus sokasággal, hanem Σ -n belül függ a helytől és időben is fejlődik. Ezt a fejlődést írja le

\Rightarrow A statisztikus termodinamika második posztulátuma: zárt termodinamikai rendszerek eloszlásfüggvénye a mikrokanonikus eloszláshoz tart. Ez a posz-

tulátum tehát a termodinamika második főtétele (egyensúlyhoz tartás) alapozza meg, és azt jelenti, hogy pl. egy kezdetben Σ egy kicsiny részére korlátozott sokaság “szétdiffundál” az egész energiafelületen.

Felmerül a kérdés, hogyan egyeztethető össze a fent leírt diffúzió a Liouville-tétellel, melynek értelmében nemdisszipatív rendszer eloszlásfüggvényének értéke mozgásállandó: $Df/Dt \equiv \partial f/\partial t + \dot{\mathbf{r}} \partial f/\partial \mathbf{r} + \dot{\mathbf{p}} \partial f/\partial \mathbf{p} = 0$. A megoldást az ún. *durvaszemcsés eloszlásfüggvény* bevezetése jelenti, ami a tényleges (finomszemcsés) eloszlásfüggvény valamilyen véges “ablakkal” lesimított átlaga. A finomszemcsés eloszlásfüggvény értéke tehát valóban konstans marad, de a kezdetben Σ kis részére korlátozott sokaság “amőbalábakat” növesztve szétmászik az egész Σ -felületen, mindenütt sűrűn behálózva azt. Ennek során, mint könnyű elképzelni, a durvaszemcsés eloszlás valóban diffúzió-szerűen változik, s végül a mikrokanonikushoz tart. Szigorúan véve tehát a nemegyensúlyi termodinamikában az entrópia definíciójában a durvaszemcsés eloszlásfüggvény szerepel.

A statisztikus mechanika fentebb felsorolt posztulátumainak a mechanika törvényeiből való lezármaztatását tűzte ki célul a matematikai fizika egy speciális fejezete, az *ergodelmélet*. Ez az elmélet mindmáig nem érte el a fenti célt, de azt már sikerült kimutatni, hogy minden feltevés visszavezethető lényegében ugyanazon posztulátumra, mely a sok részecskéből álló rendszer dinamikájának kellően kaotikus jellegével kapcsolatos.

A fenti előkészületek után most definiálhatjuk a rendszer entrópiáját az

$$S = -k_B \int f \ln f d\Gamma \quad (1.28)$$

formulával.* Nyilvánvaló, hogy ez a funkcionál f -en keresztül függ E -től, az integrálási tartomány mérete és dimenziószáma révén pedig V -től és N -től is: $S = S(E, V, N)$. Könnyen belátható az is, hogy S extenzív mennyiség, hiszen $\ln f$ várható értékével arányos, f pedig valószínűség jelentésű: annak együttes valószínűsége, hogy az A részrendszer $f^{(A)}$, a B pedig $f^{(B)}$ állapotban van, $f^{(A)} f^{(B)}$, s így a logaritmusok összeadódnak.

Ha most (1.28)-ba behelyettesítjük az (1.27) mikrokanonikus eloszlást,

$$S = -k_B \int \frac{1}{W(\Sigma)} \ln \frac{1}{W(\Sigma)} d\Sigma = k_B \ln W(\Sigma) \quad (1.29)$$

az eredményünk. Ez a fenti (Gibbs-féle) definícióval szemben az entrópia egy alternatív (Boltzmann-féle) definíciójának is tekinthető; a kettő szigorúan véve csak mikrokanonikus sokaság esetén ekvivalens, de jó közelítéssel a többi, alább tárgyalandó sokaság esetén is. Nemegyensúlyi rendszerekre viszont az (1.29) definíció értelmét veszti. Az (1.29) formula mégis sokszor hasznos, s rávilágít az entrópia szemléletes jelentésére is: az adott makroállapothoz tartozó mikroállapotok számát, vagyis a rendszerről alkotott makroszkopikus ismereteink hiányosságát, a makroállapot “rendezetlenségét” jellemzi.

Az $S(E, V, N)$ függvényre most már a fenomenologikus termodinamika formalizmusát alkalmazva, elvben a rendszert jellemző $W(\Sigma)$ függvény ismeretében meghatározható pl. az állapotegyenlet, s valamennyi termodinamikai mennyiség kifejezése.

Erősen kölcsönható rendszerek esetén, pl. a sztellárdinamikában a fenti okfejtés legnagyobb része szintén alkalmazható, két különbséggel. Egyrészt ilyen rendszereknél az E energia *nem* az egyetlen kontrollálható integrál: fellépnek mellette más kontrollálható integrálok is, így az impulzusmomentum, sőt a violens relaxáció esetében további, ma még ismeretlen integrálok is. Ezért az

*A $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmann-állandó történeti okokból bevezetett, önkényes faktor csupán.

ergodelméletnek (mely a kontrollálható integrálok számát és alakját meghatározhatja) a sztellárdinamikában különös jelentősége van.

Másfelől a rendszer részei közti kölcsönhatási energia miatt a kontrollálható integrálok nem additívek, s így a termodinamikai formalizmus az $S(E, V, N)$ függvényre nem alkalmazható.

KANONIKUS SOKASÁG Bár az eddigiek alapján elvileg bármely termodinamikai rendszer állapotegyenlete levezethető, technikai okokból gyakran célszerűbb az állapotegyenletet nem a mikrokanonikus sokaság, hanem két másik, alább definiálandó sokaság eloszlásfüggvénye segítségével leszámaztatni. E sokaságok egyike az ún. *kanonikus sokaság*, mely nem teljesen zárt (rögzített energiájú, térfogatú és részecskeszámú), hanem környezetével termikus egyensúlyban levő, csak mechanikailag és anyagilag zárt (rögzített hőmérsékletű, térfogatú és részecskeszámú) rendszer reprezentáns sokasága.

Ha rendszerünket A -val, környezetét (melyet végtelen nagynak is tekinthetünk) B -vel jelöljük, akkor az $A \cup B$ rendszer egésze már zártnak vehető, E_0 energiával, s eloszlásfüggvénye a mikrokanonikus eloszlás, azaz $A \cup B$ valamennyi mikroállapota egyenlő valószínűségű. Mármost az A rendszer egy E energiájú mikroállapotához $A \cup B$ -nek nyilván $W_B(E_0 - E)$ mikroállapota tartozik, ahol W_B a B rendszer energia-hiperfelületének mértéke (statisztikus súlya). Az A egy E energiájú állapotára tehát a Boltzmann-féle (1.29) entrópiadefiníció felhasználásával

$$f(E) = \frac{W_B(E_0 - E)}{W_{A \cup B}(E_0)} \propto e^{S_B(E_0 - E)/k_B}$$

Fontos hangsúlyozni, hogy a fentiek két feltevésen nyugszanak:

- A két részrendszer energiája additív, azaz a B rendszer energiája $E_0 - E$. Ez gyengén kölcsönható rendszerekre mindig igaz (de általánosabban is gyakran teljesül, pl. a sztellárdinamikában is).
- A és B állapotai egymástól függetlenek, így B szóba jöhető állapotainak száma, W_B valóban csak $E_0 - E$ -től függ, és független A állapotától.

Másrészt E/E_0 szerinti sorfejtéssel (hiszen a hőtartály tetszőlegesen nagy), és a hőmérséklet (1.7) definícióját felhasználva

$$S_B(E_0 - E) = S_B(E_0) - \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V, N} E + \dots = S_B(E_0) - E/T + \dots$$

(Ha a hőtartály méretével végtelenhez tartunk, a fenti kifejezés nyilván egzakttá válik.) Így végül a *kanonikus eloszlásfüggvény*:

$$\boxed{f(E) = \frac{1}{Z} \exp \frac{-E}{k_B T}} \quad (1.30)$$

ahol a Z *partíciós függvény* vagy *állapotösszeg* f 1-re normáltsága miatt

$$Z = \int \exp \frac{-E}{k_B T} d\Gamma = Z(T, V, N) \quad (1.31)$$

(A V - és N -függés az integrálási tartomány határain, ill. dimenziószámán át lép fel.)

A fentiekből rögtön következik az alábbi fontos reláció az F szabad energiára:

$$F = -k_B T \ln Z \quad (1.32)$$

Levezetés: $S/k_B = -\langle \ln f \rangle = \ln Z + \frac{E}{k_B T} \Rightarrow \ln Z = -\frac{E - TS}{k_B T} = -\frac{F}{k_B T}$

(A termodinamikai jellemzőket átlagukkal azonosítottuk, tekintve, hogy elég nagy részecskeszám mellett szórásuk tetszőlegesen kicsi, ld. alább.)

F teljes differenciálja $dF = -S dT - P dV + \hat{\mu} dN$, amiből a termodinamikai mennyiségek kifejezései

$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_{V,N} + k_B \ln Z \\ P &= -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_{T,N} \\ \hat{\mu} &= \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = -k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial N}\right)_{T,V} \\ E &= -T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T}\right)_{V,N} = k_B T^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_{V,N} \end{aligned} \tag{1.33}$$

NAGYKANONIKUS SOKASÁG A fenti koncepció általánosításával jutunk el a *nagykanonikus sokasághoz*, melyben rendszerünk már anyagilag sem elszigetelt a környezetétől, hanem azzal diffúziós egyensúlyban van (a hőmérséklet, a térfogat és a kémiai potenciál rögzített). Ilyen esetben, mivel a Γ -tér N dimenziószáma nem rögzített, a rendszer lehetséges állapotainak összességét nem egy Γ -tér, hanem megszámlálható sok $N = 0, 1, \dots, \infty$ Γ -tér együttese alkotja, s így a fázistérre vett integrálok a $\sum_{N=0}^{\infty} f d\Gamma$ kifejezéssel helyettesítendők. A fentiekhez hasonlóan

$$f(E, N) = \frac{W_B(\epsilon_0 - E, N_0 - N)}{W_{A \cup B}(\epsilon_0, N_0)} \propto e^{S_B(\epsilon_0 - E, N_0 - N)/k_B}$$

$$\begin{aligned} S_B(\epsilon_0 - E, N_0 - N) &= S_B(\epsilon_0, N_0) - \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} E - \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E} N + \dots \\ &= S_B(\epsilon_0, N_0) - E/T - \hat{\mu}N/T + \dots \end{aligned}$$

amiből a *nagykanonikus eloszlásfüggvény*

$$\boxed{f = \frac{1}{\Xi} \exp \frac{\hat{\mu}N - E}{k_B T}} \tag{1.34}$$

ahol a nagykanonikus partíciós függvény (nagykanonikus állapotösszeg):

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \int \exp \frac{\hat{\mu}N - E}{k_B T} d\Gamma = \Xi(T, V, \hat{\mu}) \tag{1.35}$$

(Ξ a nagy "Kszi" betű.) Ez utóbbi a

$$\lambda = e^{\hat{\mu}/k_B T} \tag{1.36}$$

aktivitás bevezetésével így is írható:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N Z(T, V, N) \quad (1.37)$$

ahol Z a kanonikus állapotösszeg.

Az (1.32) összefüggés analógja most az $\Omega \equiv PV$ (*nagykanonikus potenciálnak* is nevezett) termodinamikai potenciálra vonatkozó alábbi reláció:

$$\Omega \equiv PV = k_B T \ln \Xi \quad (1.38)$$

Ennek teljes differenciálja $d\Omega = S dT + P dV + N d\hat{\mu}$, így a termodinamikai mennyiségeket az alábbi kifejezések állítják elő:

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \hat{\mu}} = k_B T \left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial T} \right)_{V, \hat{\mu}} + k_B \ln \Xi \\ P &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \hat{\mu}} = k_B T \left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial V} \right)_{T, \hat{\mu}} = \frac{k_B T}{V} \ln \Xi \\ N &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \hat{\mu}} \right)_{T, V} = k_B T \left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \hat{\mu}} \right)_{T, V} \end{aligned} \quad (1.39)$$

A (1.33) és (1.39) kifejezésekben E és N most már természetesen e mennyiségek várható értékét jelenti, ezt azonban külön nem jelöljük. Mivel makroszkopikus rendszerek esetén $N \gg 1$, az egy részecskére eső energia pedig (mint alább látni fogjuk) tipikusan $\sim k_B T$, így $E/k_B T \gg 1$, és az eloszlások rendkívül erősen koncentrálnak a várható értékek körül. Az eddig definiált eloszlások tehát empirikusan gyakorlatilag megkülönböztethetetlenek, kényelmes matematikai eszközök csupán a termodinamikai relációk leszarmaztatásához. E célból bármelyiküket használhatjuk, az adott problémától függ, melyikük alkalmazása a legkézenfekvőbb. A termodinamikai alapösszefüggések levezetéséhez minden esetben egy vagy két a mennyiség bizonyos fázistér-integráljait kell kiszámítani: W kiszámításához $a = 1$, Z -éhez $a = \exp(-E/k_B T)$. A mikrokanonikus sokaság esetében csak W kiszámítására van szükség, a kanonikus és nagykanonikus sokaságnál viszont T rögzített, így a minden esetben csak E függvénye, s így az energia-hiperfelületen konstans. A kiszámítandó integrál tehát

$$\int a d\Gamma = \int_0^{\infty} a \int_{\Sigma} dW dE = \int_0^{\infty} a W(E) dE \quad (1.40)$$

alakba is írható.

KVANTUM STATISZTIKUS TERMODINAMIKA Az eddigiekben klasszikus mechanikai rendszereket tekintettünk. Az a tény, hogy a bennünket érdeklő mikroszkopikus alkotóelemekből álló közegek részecskéire a kvantummechanika törvényei vonatkoznak, eddigi okfejtéseinket három pontban változtatja meg.

- (1) A szóba jehető stacionárius mikroállapotok nem folytonos, hanem diszkrét sokaságot alkotnak. (Ezek az energia-sajátállapotok, a Schrödinger-egyenlet időfüggetlen megoldásai. A sajátértékek spektruma pedig véges kiterjedésű rendszernél mindig

diszkrét.) Ez az eddigiekhez képest voltaképpen egyszerűsítést jelent, hiszen így **a fázisintegrálok az állapotokra vett összegekkel helyettesítendők:**

$$\int a d\Gamma \rightarrow \sum_j a_j. \quad (1.41)$$

(Vegyük észre, hogy a és a_j dimenziója eltérő, hiszen a fázissűrűséget reprezentál.) A statisztikus súly jelentése pedig most az adott E energia-sajátértékhez tartozó lineárisan független sajátállapotok száma — vagyis az adott (elfajult) energia-sajátállapot g multiplicitása:

$$W(E) \rightarrow g. \quad (1.42)$$

Ahogy klasszikus esetben az állapottérre vett integrál (1.40) szerint felírható az energia-hiperfelületekre vett integrálok energia szerinti integráljaként, ugyanúgy a kvantumos esetben is helyettesíthetjük az állapotok szerinti összegzést az energiaszintekre vett, súlyozott összegekkel (j és l a továbbiakban mindig az egyes állapotokat, illetve az energiaszinteket indexeli):

$$\sum_j a_j = \sum_l g_l a_l \quad (1.43)$$

ahol g_l az E_l energiájú lineárisan független sajátállapotok száma (a szint statisztikus súlya).

Az állapotok diszkrét jellegét úgy is figyelembe vehetjük, hogy a Γ -teret vagy az egyrészecske-állapotteret kicsiny *kvantumcellákra* bontjuk, s az egy cellán belüli állapotokat fizikailag azonosnak tekintjük. A kvantumcellák léte annak a ténynek felel meg, hogy a határozatlansági reláció értelmében a részecskék helyzetét és impulzusát (tehát állapotát) szabadsági fokoként csak egy $\Delta x \Delta p \geq h/4\pi$ bizonytalansággal mérhetjük, ahol h a Planck-állandó; ennél kisebb különbség esetén két állapot mérésrel nem megkülönböztethető. A részletesebb megfontolások szerint **a kvantumcellák mérete szabadsági fokoként éppen h lesz** (vagyis az egyrészecske-fázistérben h^3 , a Γ -térben h^{3N}).

A g statisztikus súlyok értéke N -nel és E -vel hihetetlenül gyorsan nő. Tekintsünk pl. egy N darab azonos kétállapotú "atomból" álló rendszert. Az alapállapotban $g_0 = 1$, hiszen ez csak egyféleképpen lehetséges (ha minden atom alapállapotban van). Az l -edik gerjesztett állapotban l atom van gerjesztve, ami $g_l = \binom{N}{l}$ -féleképpen lehetséges, tehát l -lel valóban igen meredeken nő.

Az alapállapotra vonatkozó $g_0 = 1$ következtetés általános érvényű: az alapállapot általában nem elfajult. Ennek következtében (1.29) szerint az alapállapotban $S = 0$: a kvantum statisztikus mechanikában automatikusan teljesül a termodinamika 3. főtétele!

- (2) A részecskéknek — még az oszthatatlanoknak is — lehetnek nem helyzetükkel és mozgásukkal kapcsolatos, *belső szabadsági fokaik* is, melyek közül legfontosabb a saját perdület vagy *spin*. Ez lényegében az egyrészecske-állapottér dimenziószámának növelésével írható le: az újabb dimenzióban a kvantumcellák száma az adott belső szabadsági fokok (spinbeállások) lehetséges száma, g_s . Ezért a partíciós függvények számításánál a statisztikus súlyokban a g_s (N részecskére g_s^N) szorzó is figyelembe veendő.

- (3) Mivel a mikroszkopikus részecskék nem megkülönböztethetők, a rendszer olyan-mikroállapotai, melyek csak 1-1 részecske hely- és impulzuskoordinátáinak felcserélésében különböznek, fizikailag azonosak. Így az állapotösszegeket korrigálni kell. N darab részecske sorrendje nyilván $N!$ -féle lehet, tehát ennyi fizikailag azonos állapotot kaphatunk a cserélgetésükkel, ami azt sugallja, hogy az állapotösszegeket is ezzel a faktorialis szorzóval kell csökkenteni.

A fenti megfontolásokat összegezve tehát a kvantált eset állapotokra vonatkozó összegei a klasszikus eset integráljaival a

$$\sum_j a_j = \frac{g_s^N}{N! h^{3N}} \int a d\Gamma \quad (1.44)$$

összefüggésben állnak. Ezt nevezzük *kváziklasszikus állapotszámlálásnak*. Konkrétan pedig ($a = 1$)

$$g(E) = g_s^N \frac{W(E)}{N! h^{3N}} \quad g_l = g(E) (E_{l+1} - E_{l-1})/2 \quad (1.45)$$

és ($a = \exp(-E/k_B T)$)

$$\frac{Z_{\text{kvantált}}}{Z_{\text{klasszikus}}} = \frac{g_s^N}{N! h^{3N}} \quad (1.46)$$

KICSERÉLŐDÉSI KÖLCSÖNHATÁS Az $N!$ redukció azonban túlzott lesz akkor, ha két részecske azonos állapotban van — hiszen ekkor a felcserélésükkel kapott állapotot eddig sem tekintettük különbözőnek. Mivel klasszikus esetben az állapotok folytonos sokaságot képeznek, két részecske állapota csak zéró valószínűséggel egyezhet meg, így ekkor a korrekciótól eltekinthetünk. A kvantumos esetben viszont, a kvantumcellák véges mérete miatt ez a valószínűség véges. **Ha a részecskék egyrészecske-állapottérbeli sűrűsége elég nagy ahhoz, hogy** (független eloszlást feltéve) **jelentős valószínűséggel essen két részecske egy kvantumcellába, a közeget elfajultnak nevezzük.** A kellő állapottérbeli sűrűség — vagyis az elfajulás — nyilván két úton érhető el: a közeg tényleges fizikai összenyomásával, azaz nagy sűrűségeken, vagy impulzustérbeli “összenyomással”, azaz alacsony hőmérsékleten.

Ha két részecske egy kvantumcellában való tartózkodása megengedett, az $1/N!$ korrekció, mint mondtuk, túlredukálja az állapotösszeget. Az ilyen, egy cellában több részecskét tartalmazó állapotok tehát a valóságban gyakoribbak lesznek a kváziklasszikus számlálás szerintinél: a részecskék között az állapottérben egyfajta “effektív vonzás” lép fel. Az ilyen részecskék a *bozonok*.

Vannak azonban olyan részecskék is, az ún. *fermionok*, melyekre nézve nem megengedett, hogy ketten azonos kvantumcellában tartózkodjanak (ez az ún. Pauli-féle *kizárási elv*.) Ez viszont nyilván egy “effektív taszítást” jelent az egyrészecske-fázistérben.

A bozonok ill. fermionok közötti effektív erő, az ún. *kicserélődési kölcsönhatás* tehát elfajult állapotban, szélsőséges sűrűségek illetve hőmérsékletek esetén lesz csak jelentős. Más esetekben a kváziklasszikus állapotszámlálás is kielégítő eredményeket ad. Most a továbbiakban a kváziklasszikus esetről maradunk, s az elfajulásra később térünk vissza.

1.3 IDEÁLIS GÁZ

TERMODINAMIKAI RELÁCIÓK Az ideális gáz olyan, $N \gg 1$ részecskéből álló rendszer, melynek energiája az egyes részecskék mozgási energiájának összege:

$$E = \sum_{i=1}^N \epsilon_i(p_i) \quad (1.47)$$

ahol ϵ_i és p_i az i -edik részecske kinetikus energiája és impulzusa. A továbbiakban csak pontszerű (3 szabadsági fokú) részecskéket tekintünk. Az általános, relativisztikus esetben

$$\epsilon_i^2 = m^2 c^4 + p_i^2 c^2 \quad (1.48)$$

ahol m a — minden részecskére azonosnak vett — részecsketömeg. míg a nemrelativisztikus ($v/c \ll 1$) ill. az ultrarelativisztikus (vagy extrém relativisztikus, $v \simeq c$, ill. precízebben $0 < 1 - v/c \ll 1$) határesetekben

$$\epsilon_i = \begin{cases} \frac{p_i^2}{2m} & \text{nemrelativisztikus esetben} \\ p_i c & \text{ultrarelativisztikus esetben} \end{cases} \quad (1.49)$$

Szorosabb értelemben ideális gázzal csak a nemrelativisztikus esetben szokás beszélni. Ideális gázban az egyes részecskék impulzusának időnkénti megváltozását, s így a rendszer fázistérbeli bolyongását csupán a részecskék időnkénti *ütközései*, vagyis szoros megközelítések esetén fellépő pillanatszerű impulzus- és energiacsereit biztosítják.

A részecskék függetlensége miatt a Z állapotösszeg az egyes részecskék z állapotösszegeinek szorzata alakjában írható fel. Kváziklasszikus számlálással

$$Z = \frac{1}{N!} z^N \quad (1.50)$$

z levezetéséhez szükségünk lesz a $g(\epsilon)$ statisztikus súlyfüggvényre. Ennek felírásához vezessük be a $\Phi(\epsilon) = \frac{g_s}{h^3} \int_0^\epsilon W(\epsilon) d\epsilon$ segédmenyiséget, amely tehát az egyrészecske-fázistér ϵ -nál kisebb energiájú részében levő kvantumállapotok száma. Az ebben szereplő integrál a koordinátatérbeli V térfogat és az impulzustérbeli $\frac{4}{3}\pi p^3$ térfogat szorzata:

$$\Phi = \frac{g_s V}{h^3} \frac{4}{3} \pi p^3 = \begin{cases} \frac{g_s V}{h^3} \frac{4}{3} \pi (2m\epsilon)^{3/2} & \text{nemrelativisztikus esetben} \\ \frac{g_s V}{(ch)^3} \frac{4}{3} \pi \epsilon^3 & \text{ultrarelativisztikus esetben} \end{cases} \quad (1.51)$$

Ezzel

$$g(\epsilon) = \frac{d\Phi}{d\epsilon} = \begin{cases} \frac{g_s V}{h^3} 2\pi (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} & \text{nemrelativisztikus esetben} \\ \frac{g_s V}{(ch)^3} 4\pi \epsilon^2 & \text{ultrarelativisztikus esetben} \end{cases} \quad (1.52)$$

Ezzel pedig (most már csak a nemrelativisztikus esetet tekintve)

$$z = \int_0^\infty g(\epsilon) \exp \frac{-\epsilon}{k_B T} d\epsilon = g_s V \frac{\pi}{4} \left(\frac{8mk_B T}{h^2} \right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty u^{1/2} e^{-u} du}_{\sqrt{\pi}/2} = \frac{g_s V}{\Lambda^3} \quad (1.53)$$

ahol

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{(2\pi mk_B T)^{1/2}} \quad (1.54)$$

a koordinátatér egy (kocka alakúnak tekintett) kvantumcellájának éle; az $n_Q \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{-3}$ mennyiség, az ún. *kvantumkoncentráció* pedig a kvantumcellák száma térfogategységenként.

(1.50) és (1.53) alapján

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{g_s V}{\Lambda^3} \right)^N \quad (1.55)$$

vagyis az $N \gg 1$ esetén érvényes $\ln N! \simeq N \ln N - N$ közelítő Stirling-formula felhasználásával

$$\ln Z = -N \ln N + N + N \ln z = N \ln \left[\left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{g_s V}{N} e \right] \quad (1.56)$$

Ebből a kanonikus sokaságra vonatkozó (1.32) és (1.33) képletek felhasználásával adódnak az ideális gázok jól ismert termodinamikai relációi. Így az energia kifejezése

$$E = \frac{3}{2} N k T \quad (1.57)$$

azaz minden részecskére $\frac{3}{2} k_B T$ energia jut. Pontszerű részecskék esetén eszerint:

$$\frac{1}{2} \mu m_H \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T \quad (1.58)$$

Az állapotegyenlet az $n = N/V$ részecske-számsűrűség bevezetésével

$$\boxed{P = \frac{N k_B T}{V} = n k_B T = \frac{2}{3} E} \quad (1.59)$$

alakban adódik, a kémiai potenciálra pedig (1.33) alapján

$$\hat{\mu} = -k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial N} \right)_{T,V} = -k_B T \ln \frac{z}{N} \quad (1.60)$$

az eredményünk, amivel az (1.36) aktivitás

$$\lambda = N/z \quad (1.61)$$

Az energia fenti (1.57) kifejezéséből a fajhő

$$c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{3}{2} N k_B \quad (1.62)$$

Végül a fundamentális egyenlet

$$S = \frac{E - F}{T} = Nk_B \ln \left[\left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{g_s V}{N} e^{5/2} \right] \quad (1.63)$$

Ez utóbbiból az $S = \text{const.}$ adiabata egyenlete $VT^{3/2} = \text{const.}$, vagyis az (1.18)-ben és (1.19)-ben definiált kitevők értéke

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{2}{5} \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \gamma = \frac{5}{3} \quad (1.64)$$

Az az eredmény, miszerint az egy részecskére eső energia nagyságrendileg $k_B T$, nemcsak ideális gázokra, de a termodinamikai rendszerek sokkal szélesebb skálájára is érvényes. Eszerint $N \gg 1$ esetén az összenergia $E \gg k_B T$, és így az állapotösszegben szereplő exponenciális-összegben az első tag dominál. Az óriási részecskeszámok miatt tehát a makroszkopikus rendszerek mikrokanonikus, kanonikus és nagykanonikus eloszlásai egymástól empirikusan megkülönböztethetetlenek.

Feladat: Nem pontszerű részecskék esetén a mozgási energia kifejezésében a translációs mozgás (1.49) energiája mellett a rotációs mozgás energiája is fellép. Mutassuk meg, hogy ebben az esetben az energia kifejezése $E = \frac{l}{2} N k_B T$, ahol l a szabadsági fokok száma. (Kétatomos molekulákra $l = 5$, többatomosakra általában $l = 6$.) Az egy szabadsági fokra eső energia tehát minden esetben $\frac{1}{2} k_B T$ (*ekvipartíciós tétel*). Mutassuk meg továbbá, hogy ekkor $\nabla_{\text{ad}} = 2/(l+2)$ és a gammák értéke $(l+2)/l$.

A MAXWELL-BOLTZMANN STATISZTIKA Mivel a részecskék között távolhatások nincsenek, így ideális gáz esetén egyetlen részecske is környezetével gyengén kölcsönható rendszernek tekinthető, s alkalmazható rá a termodinamikai leírás. (Kölcsönható részecskék esetén ez nem teljesül.) Az egy részecskére felírt kanonikus eloszlás szerint az ϵ_j energiájú j -edik állapotban az eloszlásfüggvény, vagyis az állapot betöltési valószínűsége

$$p_j = \frac{1}{z} \exp \frac{-\epsilon_j}{k_B T} \quad (1.65)$$

illetve az ϵ_l energiájú az l -edik energiaszint betöltési valószínűsége

$$p_l = \frac{g_l}{z} \exp \frac{-\epsilon_l}{k_B T} \quad (1.66)$$

Mivel a részecskék között nincs kölcsönhatás, így a fenti eloszlás írja le N -részecskés rendszerben az azonos állapotban ill. energiaszinten tartózkodó részecskék várható számát is, az s_j *betöltési számot*:

$$s_j = N p_j \quad \text{ill.} \quad s_l = N p_l \quad (1.67)$$

ami (1.66) és a reaktivitás (1.61) kifejezése felhasználásával így írható:

$$s_j = \lambda \exp \frac{-\epsilon_j}{k_B T} \quad (1.68)$$

Ez a *Maxwell-Boltzmann statisztika*.

Helyettesítsük be az (1.66) Boltzmann-eloszlásba g_l és z (1.52) és (1.53) kifejezéseit:

$$p(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\epsilon^{1/2}}{(k_B T)^{3/2}} \exp \frac{-\epsilon}{k_B T} d\epsilon \quad (1.69)$$

Ha most az eloszlást az ϵ részecskeenergia helyett a vele $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$, $d\epsilon = mv dv$ kapcsolatban álló sebesség függvényében adjuk meg, az eredmény

$$p(v) dv = p[\epsilon(v)] \frac{d\epsilon}{dv} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \frac{-mv^2}{2k_B T} dv \quad (1.70)$$

Ez a *Maxwell-féle sebességeloszlás*. Az eloszlás szórása, mint látható, $(2k_B T/m)^{1/2}$, azaz termikus egyensúly (fix T) esetén a nagyobb tömegű részecskék kisebb, a kisebbek nagyobb termikus sebességekkel rendelkeznek. Hidrogénplazmában pl. az elektronok hőmozgása $\sim \sqrt{2000} \sim 45$ -ször gyorsabb, mint a protonoké.

AZ ÁTLAGOS MOLEKULASÚLY Az $\mathcal{R} = k_B/m_H$ egyetemes gázállandó bevezetésével (m_H az atomi tömegegység) a (1.59) állapotegyenlet így is írható:

$$\boxed{P = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T} \quad (1.71)$$

Kérdés, hogyan fejezhető ki a $\mu = \rho/nm_H$ (dimenziótlan) átlagos molekulasúly adott kémiai összetétel esetén?

Legyen az i -edik kémiai összetevő koncentrációja (tömeghányada) c_i , molekulasúlya μ_i , rendszáma, szám- és tömegsűrűsége pedig rendre Z_i , n_i , ρ_i . Nyilván

$$\rho_i = c_i \rho = n_i \mu_i m_H \quad (1.72)$$

Így μ definícióját figyelembe véve semleges anyag esetén triviálisan

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} \equiv \sum_i \frac{c_i}{\mu_i}. \quad (1.73)$$

De mi a helyzet az asztrofizikában fontosabb szerepet játszó teljes ionizáció esetén? Ekkor

$$n = n_e + \sum_i n_i = \sum_i (1 + Z_i) n_i \quad (1.74)$$

hiszen minden atom Z elektronnal plusz egy atommaggal járul hozzá a részecskeszámhoz. (Az 'e' index az elektronokra utal.) A nyomás fizikai jelentéséből következik, hogy az egyes komponensek parciális nyomásai összeadhatók:

$$P = P_e + \sum_i P_i = (n_e + \sum_i n_i) k_B T = \left[\sum_i (1 + Z_i) n_i \right] k_B T = \mathcal{R} \left[\sum_i \frac{c_i (1 + Z_i)}{\mu_i} \right] \rho T \quad (1.75)$$

amit (1.71)-tel összevetve

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{c_i (1 + Z_i)}{\mu_i} \quad (1.76)$$

Tiszta hidrogén esetén természetesen $\mu = 1/2$; héliumnál pedig $\mu = 3/4$.

Az asztrofizikában a vegyi összetételt gyakran a hidrogén, a hélium, illetve a “fémek” (azaz minden $Z_i > 2$ elem) X , Y , ill. Z koncentrációjának megadásával jellemezzük. Mivel a fémek többségére $Z_i + 1 \simeq Z_i$ és $\mu_i = A_i \simeq 2Z_i$ (A_i a tömegszám), így a fentiből a

$$\mu = \frac{4}{8X + 3Y + 2Z} \quad (1.77)$$

relációra jutunk.

Egyes esetekben érdekes a μ_e egy elektronra jutó átlagos molekulásúly is. Ennek kifejezése

$$\mu_e = \left(\sum_i \frac{c_i Z_i}{\mu_i} \right)^{-1} \simeq \frac{2}{1 + X} \quad (1.78)$$

Fenti képletek tehát teljes ionizáció mellett érvényesek. A részleges (parciális) ionizációnál μ meghatározásához tudnunk kell az ionizáció fokát adott összetételű gázban adott hőmérsékleten és nyomáson. E problémával a következő szakaszban foglalkozunk majd.

ELTÉRÉSEK AZ IDEÁLIS GÁZTÖRVÉNYTŐL Az ideális gáztörvényt fentebb kváziklasszikus állapotszámlálás használatával, a részecskék kölcsönhatásainak elhanyagolásával, nemrelativisztikus kinematikai formulák felhasználásával vezettük le. Ennek megfelelően az alábbi esetekben szükséges a fenti formalizmus módosítása.

(a) *Elfajult állapotban* (nagy sűrűségek, ill. alacsony hőmérsékletek mellett). Erős elfajulásnál a fenti állapotegyenlet érvényét veszti, helyette egészen más alakú állapotegyenlet használandó. Ezt az esetet az 1.5–1.6 szakaszban tárgyaljuk majd. Mivel a fent definiált $n_Q = \Lambda^{-3}$ kvantumkoncentrációval $g_s n_Q$ megadja a T hőmérsékletű gázban a részecskék számára elérhető állapotok számát térfogategységenként, így nyilván akkor lesz elhanyagolható valószínűséggel két részecske egy állapotban, ha $g_s n_Q / n \gg 1$. Az *elfajulás feltétele* tehát

$$\frac{2(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3 n_e} \ll 1 \quad (1.79)$$

(A feltételt az elektronokra írtuk fel, mivel kis tömegük és nagy számuk folytán rájuk a legenyhébb.)

(b) *A részecskék közötti erők* (pl. Coulomb-kölcsönhatás) figyelembevétele esetén. E kölcsönhatások gyengesége miatt gázoknál csak kisebb mértékű korrekciókra van szükség. Alacsony hőmérsékleten, folyadékok és szilárd anyagok esetén ezek a hatások dominálnak, és éppen ez a halmazállapot-változások oka. Ilyenkor természetesen ismét egészen más lesz az állapotegyenlet. Ezzel az esettel majd az 1.8 szakaszban foglalkozunk.

(c) *Relativisztikus effektusok*. Ezek a gyakorlatban leginkább az elfajult anyagban lépnek fel, hiszen nemelfajult ideális gázban az ekvipartíció miatt ehhez $T \sim m_e c^2 / k_B \sim 10^{10}$ K hőmérséklet kell.

(d) *Részleges (parciális) ionizáció* esetén a különféle részecskék (ionok, elektronok) egymásba alakulhatnak, illetve az összenergia számításánál figyelembe veendő az ionizációs potenciál is. Ezt az esetet a következő szakaszban vizsgáljuk.

1.4 RÉSZLEGES IONIZÁCIÓ

BOLTZMANN- ÉS SAHA-ELOSZLÁS A csillagok külső rétegeiben tapasztalható részleges (parciális) ionizáció számos alapvető fontosságú jelenség (pl. konvekció, pulzáció) megértésében kulcsszerepet játszik.

Legyen $n_{r,s}$ egy adott elem r -szeresen ionizált, s -edik gerjesztett állapotban levő ionjainak száma. Mivel adott r esetén az egyes ionok egymással nem kölcsönható rendszerek, a különböző gerjesztett állapotok gyakoriságeloszlására alkalmazható a kanonikus eloszlás. Így a *Boltzmann-formulához* jutunk:

$$\frac{n_{r,s}}{n_{r,0}} = \frac{g_{r,s}}{g_{r,0}} \exp \frac{-\chi_{r,s}}{k_B T}. \quad (1.80)$$

($g_{r,s}$ a megfelelő állapot statisztikus súlya, $\chi_{r,s}$ a gerjesztési energia.) Ezt saját s szerinti szummájával elosztva a Boltzmann eloszlás alábbi alternatív alakját kapjuk:

$$\frac{n_{r,s}}{n_r} = \frac{g_{r,s}}{z_r} \exp \frac{-\chi_{r,s}}{k_B T} \quad (1.81)$$

ahol $z_r = \sum_s g_{r,s} \exp(-\chi_{r,s}/k_B T)$ a partíciós függvény.

A különböző ionizációfokú ionok relatív gyakoriságát viszont az ún. *Saha-formula* adja meg:

$$\frac{n_{r+1,0} n_e}{n_{r,0}} = \frac{g_{r+1,0}}{g_{r,0}} f_r(T) \quad (1.82)$$

ahol

$$f_r(T) = \frac{2}{\Lambda_e^3} \exp \left(\frac{-\chi_r}{k_B T} \right) = 2 \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp \left(\frac{-\chi_r}{k_B T} \right). \quad (1.83)$$

Itt χ_r az ionizációs potenciál.

Levezetés: A Saha-formula szintén a kanonikus eloszlásból vezethető le, azonban tekintetbe kell vennünk, hogy az ionizáció ill. rekombináció során a részecskeszám megváltozik. A kanonikus eloszlás alkalmazását így az a formális trükk teszi lehetővé, hogy az $(r+1)$ -szeres ion + p impulzusú elektron együttesét az r -szeres ion gerjesztett állapotának tekintjük, s erre a rendszerre írjuk fel a kanonikus eloszlást. A $[p, p+dp]$ intervallumba eső szabad elektronokkal társult $(r+1)$ -szeres ionok relatív gyakorisága így

$$\frac{dn_{r+1,0}}{n_{r,0}} = \frac{g_{r+1,0} g(p) dp}{g_{r,0}} \exp \left(-\frac{\chi_r + p^2/2m_e}{k_B T} \right) \quad (1.84)$$

A folytonos energiaspektrumú szabad elektronok statisztikus súlya szokás szerint (a térfogat szerinti integrálást az egy elektronra eső n_e^{-1} térfogatra kell kiterjeszteni):

$$g(p) dp = \frac{g_s dV d^3p}{h^3} = \frac{8\pi p^2 dp}{n_e h^3} \quad (1.85)$$

Ezt az előző kifejezésbe behelyettesítve, és azt integrálva, az

$$\int_0^\infty x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} \quad (1.86)$$

határozott integrál felhasználásával adódik (1.82).

A Boltzmann-formula (1.81) alakját s -re szummázva, és n_r így kapott kifejezését (1.82)-ben felhasználva a Saha-egyenlet alábbi alternatív alakjához jutunk:

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{z_{r+1}}{z_r} f_r(T) \quad (1.87)$$

A képlet további gyakran használt formáit a $P_e = n_e k_B T$ helyettesítéssel nyerjük (1.82)-ből ill. (1.87)-ből:

$$\frac{n_{r+1,0}}{n_{r,0}} P_e = \frac{g_{r+1,0}}{g_{r,0}} k_B T f_r(T) \quad (1.88)$$

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} P_e = \frac{z_{r+1}}{z_r} k_B T f_r(T) \quad (1.89)$$

TERMODINAMIKAI RELÁCIÓK A parciális nyomások additivitása miatt

$$P = n_e k_B T + \sum_i n_i k_B T = (n_e + \sum_i n_i) k_B T = n k_B T = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T, \quad (1.90)$$

vagyis **az ideális gáz állapotegyenlete változatlan alakban érvényes részleges ionizáció esetén is**. Ez azonban már nem áll más termodinamikai relációkra, illetve az egyes állapotmennyiségek értékeire, melyek eltérnek az ideális gázok esetében megszokottól.

A μ átlagos molekulásúly pedig (1.77) helyett a Saha-egyenletek alapján számítható ki.

Sok állapotmennyiség meghatározásához az egy atommagra eső szabad elektronok n_e/n számának meghatározására van szükség. Az állapotegyenlet felhasználásával pl.

$$\delta_P = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P = 1 + \frac{n}{n + n_e} \left(\frac{\partial (n_e/n)}{\partial \ln T} \right)_P \quad (1.91)$$

De az átlagos molekulásúly meghatározásához is n_e/n kiszámításán át vezet az út. Az atommagok (azaz a semleges gáz) átlagos molekulásúlyát μ_0 -lal jelölve nyilván

$$\mu = \mu_0 / (1 + n_e/n) = \left[\left(1 + \frac{n_e}{n} \right) \sum_i \frac{c_i}{\mu_i} \right]^{-1} \quad (1.92)$$

n_e/n viszont a releváns összetevőkre felírt Saha-egyenletek rendszerének megoldása alapján számítható ki.

Feladat: Mutassuk meg, hogy tiszta hidrogéngáz esetén

$$\delta_P = 1 + \frac{1}{2} x(1-x) \Phi_H \quad (1.93)$$

és

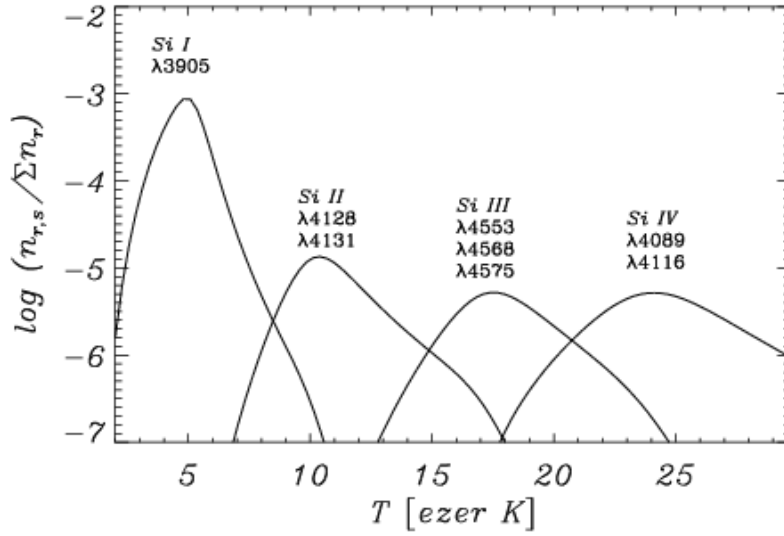
$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{2 + x(1-x) \Phi_H}{5 + x(1-x) \Phi_H^2} \quad (1.94)$$

ahol

$$\Phi_H = \frac{5}{2} + \frac{\chi_H}{k_B T} \quad (1.95)$$

χ_H pedig a H ionizációs potenciálja.

Feladat: Az első 28 elemre $\chi_1 - \chi_0 > 10 \text{ eV}$. Bizonyítsuk be, hogy normális csillagok légkörében ($T \lesssim 5 \cdot 10^4 \text{ K}$) ezen elemeknek egyszerre csak két szomszédos ionizációs foka lép fel (néhány százaléknál nagyobb gyakorisággal).



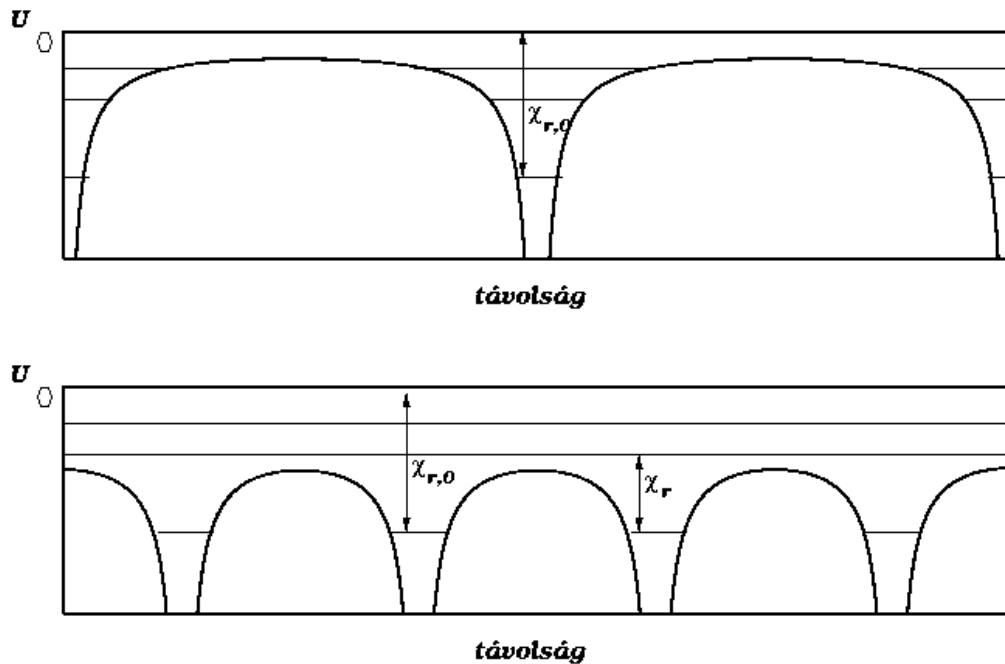
1. ábra: A szilícium fontosabb vonalait létrehozó gerjesztett állapotú ionok relatív koncentrációja a hőmérséklet függvényében, $P_e = 132 \text{ dyn/cm}^2$ elektronnyomás mellett.

ALKALMAZÁS: A CSILLAGSZÍNKÉPEK FOWLER–MILNE-FÉLE ELMÉLETE Ha az elektronnyomás értékét adottnak tekintjük, a Saha-egyenlet (1.89) alakja alapján megkaphatjuk bármely kémiai elem bármely gerjesztett állapotban levő ionjainak koncentrációját a hőmérséklet függvényében. A 1. ábra példaképpen a szilícium esetét mutatja. Látható, hogy a hőmérséklet növekedtével a semleges atomok gyakorisága csökken, az adott ionizációfokú és gerjesztésű ionok koncentrációja pedig kezdetben nő, majd egy maximumot elérve ismét csökkenni kezd.

Ha feltételezzük, hogy egy adott színeképvonal erőssége arányos (de legalábbis monoton függ) a vonalat létrehozó atomi átmenet felső szintjén levő gerjesztett ionok számsűrűségével, az ábrán láthatóhoz hasonló szekvenciát kell követniük a megfelelő színeképvonalak erősségeinek (precízebben: ekvivalens szélességeinek) is a hőmérséklet függvényében. Ily módon sikerült Fowlernek és Milne-nek 1924-ben* a csillagok színeképeinek kvalitatív értelmezését megadnia. Feltételezték, hogy a légköri nyomás egy luminozitási osztályon belül csak kismértékben változik. (Ez a feltevés jogos, hiszen a vonalszélességek alapján definiált luminozitási osztályokat a Stark-effektus folytán éppen a légköri nyomás határozza meg.) A nyomás ezen állandó értékét fősorozati csillagokra inverz úton határozták meg a Saha-egyenletből, néhány ion vonalainak mért maximális intenzitásához tartozó effektív hőmérsékletek felhasználásával. Így a $P_e = 132 \text{ dyn/cm}^2$ értékhez jutottak. Ezután ezen konstans értékkel kiszámolták számos gerjesztett ion számsűrűségét T függvényében, az 1. ábrához hasonló görbékét kapva. A görbékét a színeképvonalak erősségeinek az effektív hőmérséklet függvényében megfigyelt változásával összevetve, meggyőző egyezést tapasztaltak.

A módszert különböző elemek ionjainak relatív számsűrűségére kiterjesztve nyílt először mód a csillaglégkörök kémiai összetételének meghatározására. Ezek a korai vizsgálá-

*Fowler & Milne, MNRAS 84, 499 (1924); MNRAS 85, 970 (1925)



2. ábra: A nyomási ionizáció mechanizmusa

tok mutatták meg először, hogy létezik egy univerzális *kozmosz elemgyakoriság*, amelytől az egyes csillagokban tapasztalható értékek csak kismértékben különböznek, sőt az — a H és He kivételével — a földkéreg és a meteoritek elemgyakoriságaival is jó egyezést mutat.

A SAHA-FORMULA ALKALMAZÁSÁNAK KORLÁTAI Ha a Nap belsejének egy számított modellje alapján a mélység függvényében megpróbáljuk meghatározni a hidrogén ionizációfokát a Saha-egyenlet alapján, azt tapasztaljuk, hogy a felszíntől befelé haladva ez az ionizációfok kezdetben nő, majd egy maximum elérése után meglepő módon újra csökken, s a Nap középpontjában a hidrogén alig felerészben ionizált. Ez a képtelen eredmény annak a következménye, hogy a Saha-egyenlet levezetésénél a χ_r ionizációs potenciált állandónak vettük, noha az a valóságban a nyomás (csökkenő) függvénye. Ez a *nyomási ionizáció* jelensége.

A nyomási ionizáció szemléletesen azzal magyarázható, hogy nagy sűrűségek esetén az egyes atommagok közötti Coulomb-potenciálgát magassága a 2. ábrán vázolt módon lecsökken, így a magasabb energiaszintek delokalizálódnak, a kötött pályák ionizációs potenciálja (azaz χ_r) pedig lecsökken az eredeti (az ábrán $\chi_{r,0}$ -lal jelölt) értékéhez képest. A jelenség mértékéről a Bohr-féle atommodell alapján alkothatunk közelítőleg fogalmat. Hidrogénatomok esetén az n_q főkvantumszámú pálya sugara $a \sim a_0 n_q^2$, ahol a_0 a Bohr-féle atomsugár. Mivel n számsűrűség mellett az atomok átlagos d távolsága $d^3 \sim 3/4\pi n$, s az $a > d$ pályák delokalizálódnak, így csak az

$$n_q^2 < \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3} \frac{1}{2a_0} \quad (1.96)$$

főkvantumszámú pályák maradnak meg.

A Nap magjában $\rho \sim 170 \text{ g/cm}^3$, azaz $n \sim 10^{26} / \text{cm}^3$, így a fenti relációból $n_q^2 < 0.13 \ll 1$. Vagyis a napmagban a hidrogénatomnak a valóságban nincs is kötött állapota! Az ionizáció tehát ott feltétlenül teljes.

A nyomási ionizációra vonatkozóan kielégítő számítási módszereink nincsenek. Ezért a csillagszerkezeti számítások során a gyakorlatban a Saha-egyenletet alkalmazzák egészen addig, amíg az befelé csökkenő ionizációfokhoz nem vezet. E határon belül pedig az ionizációt többnyire egyszerűen teljesnek veszik. Az érvényességi határt durva közelítéssel az a feltétel adja meg, hogy az ionok átlagos távolsága ne legyen összemérhető a Bohr-féle atomsugárral, ami a fenti gondolatmenet megfordításával a

$$\rho < 2,7 \cdot 10^{-3} \mu_0 \text{ g/cm}^3$$

feltételre vezet.

A nyomási ionizáció mellett a Saha-formula alkalmazásának másik korlátja természetesen a termikus egyensúly feltevése (hiszen a levezetése során használt kanonikus eloszlás csak ilyenkor igaz). Ezért a Saha-formula nem használható pl. a forró, ritka, erősen neme-gyensúlyi *napkorona* ionizációs állapotának meghatározására sem.

1.5 AZ ANYAG ELFAJULÁSA. KVANTUMSTATISZTIKÁK

A KIZÁRÁSI ELV EREDETE Mint korábban említettük, a kváziklasszikus állapot-számlálásban a részecskék megkülönböztethetlenségének figyelembe vételére használt $1/N!$ korrekció nem helyes, ha a részecskék állapotterbeli sűrűsége olyan nagy, hogy két részecske számottevő valószínűséggel esik egy kvantumcellába. Hogy a korrekció túlzott, vagy éppen elégtelen, attól függ, megengedett-e, hogy két részecske egy cellába essen. Az előbbi típushoz tartozó részecskéket bozonoknak, az utóbbiakat fermionoknak nevezzük.

A kétféle viselkedés lehetősége a részecskék ψ -függvényének fizikai értelmezéséből következik. Eszerint $|\psi|^2$ valószínűségi sűrűség jelentésű, maga ψ azonban nem közvetlenül mérhető mennyiség. Ez azt jelenti, hogy több részecskéből álló rendszer ψ -függvényének nem kell invariánsnak lennie két részecske felcserélésével szemben, hanem egy általában különböző, ψ' alakot ölthet. A részecskék megkülönböztethetlensége miatt azonban $|\psi|^2$ a felcseréléssel nem változhat, vagyis ψ' csak egységnyi abszolút értékű faktorban különbözhet ψ -től: $\psi' = e^{i\phi} \psi$. Ugyanakkor ismételt felcserélés esetén természetesen ψ -nek ismét eredeti alakjába kell visszatérnie, azaz $(\psi')' = e^{i2\phi} \psi = \psi$, s így $e^{i\phi}$ csak a $+1$ vagy a -1 értékeket veheti fel. Természetesen ha két részecske azonos állapota megengedett, felcserélésükkel semmi sem változik, tehát az $e^{i\phi} = -1$ szerint viselkedő részecskékre (fermionok) egy kizárási elv kell, hogy vonatkozzon, ellentétben az $e^{i\phi} = +1$ részecskékkal (bozonok).

Relativisztikus kvantummechanikai megfontolásokkal az is bebizonyítható, hogy a bozonok ($h/2\pi$ egységekben) egész spinű, míg a fermionok feles spinű részecskék.

AZ ALAPVETŐ RÉSZECSKÉK A világunkat felépítő alapvető részecskék körében a fermionok és bozonok között sajátos “munkamegosztás” uralkodik. A fermionok az anyag alapvető építőkövei, míg a bozonok a kölcsönhatások közvetítői a fermionok között. Az egyes részecskék jellemzőit a 2. függelék táblázatai foglalják össze.

A fermionok két fő csoportját az erős kölcsönhatásban is részt vevő *kvarkok*, illetve az erősen nem kölcsönható *leptonok* alkotják. Mindkét csoportba (antirészecskéik nélkül) 6–6 részecske tartozik, melyeket az egyes csoportokon belül 2 *családra*, ill. 3 *generáció-ra* osztunk: ezek kombinációi adják a hatféle *íz*t. A kvarkok a világ mai állapotában csak több kvarkból álló, az erős kölcsönhatás által összetartott kötött rendszerek, ún. *hadronok* alakjában fordulnak elő. A *barionok*, köztük a legkönnyebb *nukleonok* (proton és neutron), valamint az ezeknél nehezebb *hiperonok* 3 kvarkból állnak. A leptonok és barionok közé eső tömegű *mezonok* viszont 2 kvarkból álló rendszerek (s ennek megfelelően ők bozonok).

KVANTUMSTATISZTIKÁK Az elfajult anyagban a részecskék a közöttük fellépő kicserélődési kölcsönhatás miatt nem tekinthetők függetleneknek, így statisztikus mechanikai leírásukra nem alkalmazhatjuk a kanonikus sokaságot. (Ha az A rendszer egy bizonyos kvantumcellában levő részecske, akkor környezete, a B rendszer részecskéinek lehetséges állapotai között ez a cella más súllyal szerepel, mint ha A nem létezne.) Az állapotok (kvantumcellák) viszont már függetlennek tekinthetők, így ezekre felírhatók a nagykanonikus sokaság esetében érvényes összefüggések.

(1.39) utolsó összefüggését egy részecskeállapotra felírva, a részecskeszám várható értéke definíció szerint éppen az állapot betöltési számát adja:

$$s_j = \lambda \left(\frac{\partial \ln \xi}{\partial \lambda} \right)_{V,T} \quad (1.97)$$

ξ -t itt (1.37)-ből kifejezve

$$\xi_j = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \lambda^n \exp\left(\frac{-n\epsilon_j}{k_B T}\right); \quad n_{\max} = \begin{cases} 1 & \text{fermionokra} \\ \infty & \text{bozonokra} \end{cases} \quad (1.98)$$

(Vegyük észre, hogy a z “állapotösszeg” itt nem szumma, hiszen egy adott állapotra vonatkozik.) A részecskeszám szerinti összeget kiszámítva:

$$\xi_j = \begin{cases} 1 + \lambda \exp(-\epsilon_j/k_B T) & \text{fermionokra} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \exp(-n\epsilon_j/k_B T) = \frac{1}{1 - \lambda \exp(-\epsilon_j/k_B T)} & \text{bozonokra} \end{cases} \quad (1.99)$$

Végül ezt (1.97)-be helyettesítve és λ (1.36) definícióját figyelembe véve fermionok esetében

$$s_j = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_j - \hat{\mu}}{k_B T}\right) + 1} \quad (1.100)$$

Ez a *Fermi–Dirac statisztika*.

Bozonokra viszont

$$s_j = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_j - \hat{\mu}}{k_B T}\right) - 1} \quad (1.101)$$

Ez a *Bose–Einstein statisztika*.

Első pillantásra látható, hogy a klasszikus limitben ($s_j \rightarrow 0$, azaz $\lambda \rightarrow 0$) mindkét statisztika ugyanazon határeloszláshoz tart:

$$s_j = \lambda \exp \frac{-\epsilon_j}{k_B T} = \exp \frac{\hat{\mu} - \epsilon_j}{k_B T}, \quad (1.102)$$

amelyet *Maxwell–Boltzmann statisztikának* nevezünk, s a klasszikus kanonikus eloszlással egybevág. (1.102)-t j -re szummázva nyilvánvalóan a már ismert (1.61) összefüggést kapjuk vissza.

A NEGYEDIK STATISZTIKA Klasszikus, azaz megkülönböztethető és nem kvantált fázis-terű részecskék esetében, ha rájuk kizárási elv nem vonatkozik, természetesen minden esetben a Maxwell–Boltzmann statisztika érvényes, hiszen állapotaik függetlenek, energiájuk additív, s így energiaeloszlásukat egyszerűen a részecskékre felírt kanonikus eloszlás adja meg. A statisztikákat az alábbi sémába rendezve azonban felmerülhet egy negyedik statisztika lehetősége is:

	Nincs kizárási elv	Kizárási elv
Klasszikus	Maxwell–Boltzmann	Lynden–Bell
Kvantumos	Bose–Einstein	Fermi–Dirac

A klasszikus, de kizárási elvnek alávetett részecskék esetét sokáig nem vizsgálták, mivel semmilyen kézenfekvő alkalmazása nem volt. 1967-ben azonban LYNDEN-BELL* rámutatott, hogy ütközésmentes rendszerek esetében a fázissűrűség megmaradása (vagyis az a tény, hogy a Liouville-tétel értelmében $Df/Dt = 0$) olyan további megszorítást jelent az adott nemegyensúlyi kezdőállapotból elérhető egyensúlyi állapotokra nézve, melynek következtében az ilyen rendszerek egyensúlyi eloszlása nem feltétlenül követi a Maxwell–Boltzmann statisztikát. Ilyen rendszerek a sztellárdinamikai rendszerek (pl. galaxisok), vagy a híg plazmák (pl. napszél).

Az ilyen rendszerek fázis-terét önkényesen cellákra osztva oly módon, hogy a $t = 0$ időpontban egy cellában legfeljebb egy részecske legyen, ez a feltétel minden későbbi időpontban is nyilván teljesülni fog. Lynden-Bell érvelése szerint ez egyfajta klasszikus kizárási elvként írható le. Feltételezve, hogy az egyetlen kontrollálható integrál az energia, ebben az esetben az egyensúlyi eloszlást egyforma részecskékre a Fermi–Dirac statisztika adja, hiszen annak levezetésében a megkülönböztethetőség csupán az $N!$ szorzót hozza be, amely az egyes állapotok statisztikus súlyában és az állapotösszegben egyaránt megjelenik, és így kiegyeszesül. Ha azonban több különböző fajta részecske (pl. különböző tömegű csillagok) van jelen, a Lynden-Bell statisztika már eltér a Fermi–Dirac-félettől, ugyanis a kvantumozott rendszerekkel ellentétben itt a fázis-ter-korlát a teljes fázis-ter-sűrűsége vonatkozik, így a kizárási elv a *különböző* típusú részecskék között is érvényesül.

A Lynden-Bell által így levezetett eloszlásfüggvény többféle részecskéből álló rendszereknél több azonos hőmérsékletparaméterű (tehát $\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$ folytán a különböző tömegű részecskékre más és más sebességszórású) Fermi–Dirac eloszlás szuperpozíciója. Ennek megfelelően a nagyobb tömegű részecskék termikus sebessége kisebb lesz, akárcsak a hagyományos ütközéses gázok esetében. A sztellárdinamikában ez azt jelenti, hogy a nagytömegű részecskék a rendszer potenciálvölgyének mélyén, a centrum táján tömörülnek, míg a kisebb csillagok kiszóródnak a periferiára: ez a *tömegszegregáció* néven ismert jelenség, amely ütközéses sztellárdinamikai rendszerekben valóban végbemegy.

*Lynden-Bell D., MNRAS 136, 101 (1967)

Ütközésmentes rendszerekben ugyanakkor e jóslattal szemben a mérések, a numerikus szimulációk és heurisztikus megfontolások alapján az ilyen rendszerekre jellemző speciális relaxációs folyamatokban a sebességeloszlás minden részecskefajtára ugyanolyan (maxwelli, minden részecskére azonos sebességszórással, azaz a részecsketömeggel arányos hőmérséklettel) — tömegszegregáció tehát nem léphet fel. (Ez a nehezen magyarázható tapasztalati tény a plazmafizikában “Langmuir-paradoxon” néven ismert.) Újabban NAKAMURA[†] mutatta meg, hogy az ellentmondás gyökere a folytonos f eloszlásfüggvényre felírt fázissűrűség-korlát Lynden-Bell-féle, önkényes cellákban érvényesülő “kizárási elvként” való interpretációja. Nakamura munkája a nemelfajult határesetben helyesen adja vissza a tapasztalt eloszlásfüggvényt (tömegfüggetlen sebességszórású Maxwell-eloszlás); az általános, elfajult esetre ugyanakkor a probléma bonyolultsága miatt az eloszlásfüggvény alakja ma még nem ismeretes.

A sztellárdinamikai alkalmazásokban további komplikációt jelent, hogy — a fenti modellekkel ellentétben — itt az energia mellett további kontrollálható integrálok is fellépnek. Az eloszlásfüggvény alakja ezért (valamint a rendszer véges tömege folytán) még a nemelfajult limitben is eltér a maxwellitől.

ELFAJULT GÁZOK TERMODINAMIKAI RELÁCIÓI A betöltési számok (vagy folytonos megfelelőjük, az eloszlásfüggvény) ismeretében most már könnyen meghatározhatók az elfajult anyag termodinamikai paraméterei. A teljes részecskeszám és energia nyilván

$$N = \sum_j s_j = \sum_j \frac{1}{\exp \frac{\epsilon_j - \hat{\mu}}{k_B T} \pm 1} = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{\exp \frac{\epsilon - \hat{\mu}}{k_B T} \pm 1} \quad (1.103)$$

$$E = \sum_j \epsilon_j s_j = \sum_j \frac{\epsilon_j}{\exp \frac{\epsilon_j - \hat{\mu}}{k_B T} \pm 1} = \int_0^\infty \frac{\epsilon g(\epsilon) d\epsilon}{\exp \frac{\epsilon - \hat{\mu}}{k_B T} \pm 1} \quad (1.104)$$

(1.38) alapján továbbá

$$PV = k_B T \ln \Xi = \pm k_B T \sum_j \ln \left[1 \pm \exp \frac{\epsilon_j - \hat{\mu}}{k_B T} \right] = \pm k_B T \int_0^\infty \ln \left[1 \pm \exp \frac{\epsilon - \hat{\mu}}{k_B T} \right] g(\epsilon) d\epsilon \quad (1.105)$$

Az ideális gáz tárgyalása során láttuk, hogy ha egy gázban a részecskék között fizikai kölcsönhatás nem lép fel, $g(\epsilon)$ -t (1.52) adja meg, vagyis az a két határesetben a

$$g(\epsilon) = C_g \epsilon^\kappa \quad (1.106)$$

alakba írható; a nemrelativisztikus esetben $\kappa = 1/2$, míg az ultrarelativisztikus esetben $\kappa = 2$. $g(\epsilon)$ fenti alakját (1.104)-be ill. (1.105)-be beírva:

$$E = C_g \int_0^\infty \epsilon^{\kappa+1} s_j d\epsilon \quad (1.107)$$

$$PV = \pm k_B T C_g \int_0^\infty \epsilon^\kappa \ln \left[1 \pm \exp \frac{\epsilon - \hat{\mu}}{k_B T} \right] d\epsilon \quad (1.108)$$

Az utóbbi két kifejezésből parciális integrálással a

$$P = \frac{1}{\kappa + 1} \frac{E}{V} \equiv \frac{1}{\kappa + 1} u \quad (1.109)$$

[†]Nakamura T.S., ApJ 531, 739 (2000)

eredményre jutunk, ahol $u = E/V$ az energiasűrűség. Ebbe κ két konkrét értékét beírva:

$$\boxed{\begin{array}{ll} P = \frac{2}{3} u & \text{nemrelativisztikus esetben} \\ P = \frac{1}{3} u & \text{ultrarelativisztikus esetben} \end{array}} \quad (1.110)$$

Levezetés: A

$$v = \int_0^\infty s_j d\epsilon = \mp k_B T \ln \left[1 \pm \exp \frac{\epsilon - \hat{\mu}}{k_B T} \right], \quad w = \frac{1}{\kappa + 1} \epsilon^{\kappa+1} \quad (1.111)$$

helyettesítéssel $v' = s_j$ és $w' = \epsilon^\kappa$, s így (1.108)-t parciálisan integrálva

$$PV = C_g \int_0^\infty v w' d\epsilon = \frac{\mp C_g k_B T}{\kappa + 1} \underbrace{\left[\epsilon^{\kappa+1} \ln \left[1 \pm \exp \frac{\epsilon - \hat{\mu}}{k_B T} \right] \right]_0^\infty}_{=0} + \frac{C_g}{\kappa + 1} \underbrace{\int_0^\infty \epsilon^{\kappa+1} s_j d\epsilon}_{=E/C_g, (1.107)\text{-ből}} \quad (1.112)$$

(1.110) az állapotegyenlet egyik alakja (ha az abban szereplő egyetlen extenzív állapotjelzőnek az energiát választjuk). Mint levezetéséből látható, teljesen általános érvényű, azaz a nemelfajult határesetben is érvényes marad.

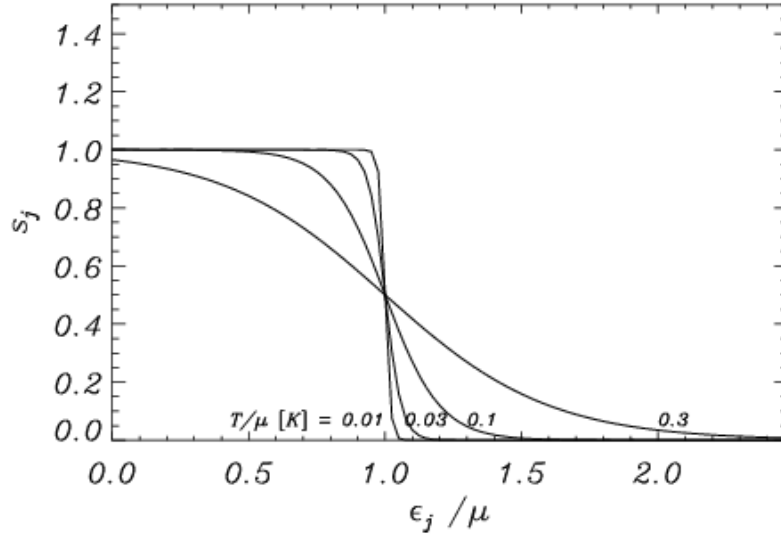
A KOZMOLÓGIAI ÁLLAPOTEGYENLET A kozmológiában az Univerzum tágulásának időfüggését kívánjuk meghatározni, amihez figyelembe kell venni a gravitáció fékező hatását. Mivel az általános relativitáselmélet szerint gravitációs hatása minden energiaformának van, a gravitáció forrásaként nemcsak a ρ_0 nyugalmi, hanem az u_T teljes energiasűrűségnek megfelelő $\rho = u_T/c^2$ teljes tömegsűrűségnek kell egyenleteinkben szerepelnie.

Mielőtt a fent kapott (1.110) relációkat naivan alkalmaznánk, gondoljuk meg, hogy mivel (1.52) a részecskeenergia (1.49) alakján alapul, az (1.110)-beli u értelemszerűen a *kinetikus* energiasűrűséget jelenti. Ez a megkülönböztetés a nemrelativisztikus esetben lényeges, hiszen itt a teljes energiasűrűségben a nyugalmi energiasűrűség dominál: $u_T \equiv \rho c^2 \simeq \rho_0 c^2 \gg u \sim P$. Az ultrarelativisztikus esetben fordítva áll a helyzet, így itt $u_T \simeq u$. Ezek szerint a standard kozmológiában az alábbi állapotegyenlet-közelítések használhatók:

$$\boxed{\begin{array}{ll} P = 0 & \text{nemrelativisztikus esetben} \\ P = \frac{1}{3} u_T & \text{ultrarelativisztikus esetben} \end{array}} \quad (1.113)$$

A fentiekben nem vettük figyelembe, hogy az u_T energiasűrűséghez a kvantumtérelmélet szerint a vákuum energiasűrűsége is hozzájárulhat. Milyen lehet az állapotegyenlet, ha esetleg az energiasűrűségben ez a járulék dominál? Ha megengedjük, hogy az üres tér is véges energiasűrűséggel, vagyis nemtriviális energia-impulzus tenzorral rendelkezzen, de megköveteljük, hogy e tenzor Lorentz-invariáns legyen (hiszen a vákuum “áramlásáról” minden vonatkoztatási rendszerben értelmetlen beszélni), akkor a vákuumra $T_{ik} \propto g_{ik}$, mivel az egyetlen Lorentz-invariáns négyestenzor a relativitáselméletben g_{ik} .

Ha most nyugvó izotrop közeg energia-impulzus tenzorának alakját összevetjük a Min-



3. ábra: A Fermi–Dirac eloszlás

kowski-tér metrikus tenzorával,

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} u_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad g_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rögtön látjuk, hogy a vákuum állapotegyenlete

$$\boxed{P = -u_T \quad \text{vákuum-dominált esetben}} \quad (1.114)$$

A vákuumnak tehát vagy a nyomása, vagy az energiasűrűsége negatív! Mivel az első főtétele szerint $dS = dE + P dV = d(u_T V) + P dV$, ez az állapotegyenlet azt jelenti, hogy a vákuum adiabatikus összenyomása ill. tágulása során energiasűrűsége változatlan marad.

1.6 AZ ELFAJULT PLAZMA

ELFAJULT ELEKTRONGÁZ Mint már az ideális gáz elfajulásának (1.79) feltétele kapcsán említettük, ez a feltétel kis tömegük és nagy számuk folytán az elektronokra a legenyhébb. A plazma összenyomása és/vagy lehűlése során ezért először a gáz elektronkomponense, az *elektrongáz* fajul el. Az elektronok fermionok, tehát a degenerált elektrongáz viselkedésének leírására a Fermi–Dirac statisztikát kell használnunk.

A (1.100) eloszlásfüggvény alakját a 3. ábra szemlélteti. A görbe alakját $\epsilon/k_B T$ függvényében egyetlen paraméter, a

$$\psi_d = \frac{\hat{\mu}}{k_B T} \quad (1.115)$$

elfajulási paraméter határozza meg. $\psi_d \rightarrow 0$ a nemelfajult, $\psi_d \rightarrow \infty$ az erősen elfajult határesetnek felel meg. Az utóbbi esetben az eloszlás egy lépcsős függvénybe megy át, melynek ugrása az $\epsilon/k_B T = \psi_d$ értéknél lesz. Az ennek megfelelő energiát *Fermi-nívónak* nevezzük; értéke tehát $\epsilon_F = \hat{\mu}$. Az erősen elfajult limitben a Fermi-nívó alatt minden állapot be van töltve, fölötte minden állapot betöltetlen.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a teljesen elfajult határesetet vizsgáljuk. (1.103) és (1.106) alapján ekkor

$$N = \int_0^{\hat{\mu}} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{C_g}{\kappa + 1} \mu^{\kappa+1} \quad (1.116)$$

Ebből $\hat{\mu}$ -ot kifejezve és C_g értékét (1.52)-ből behelyettesítve a Fermi-nívó értéke

$$\epsilon_F = \hat{\mu} = \left[\frac{(\kappa + 1)N}{C_g} \right]^{1/(\kappa+1)} = \begin{cases} \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3}{g_s 4\pi} n \right)^{2/3} & \text{nemrelativisztikus esetben} \\ ch \left(\frac{3}{4g_s \pi} n \right)^{1/3} & \text{ultrarelativisztikus esetben} \end{cases} \quad (1.117)$$

Másrészt (1.104) alapján

$$E = \int_0^{\hat{\mu}} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = C_g \int_0^{\hat{\mu}} \epsilon^{\kappa+1} d\epsilon = \frac{C_g}{\kappa + 2} \hat{\mu}^{\kappa+2} \stackrel{(1.116)}{=} \frac{\kappa + 1}{\kappa + 2} N \hat{\mu} \quad (1.118)$$

Tehát κ két értékét beírva

$$E = \begin{cases} \frac{3}{5} N \hat{\mu} & \text{nemrelativisztikus esetben} \\ \frac{3}{4} N \hat{\mu} & \text{ultrarelativisztikus esetben} \end{cases} \quad (1.119)$$

Végül pedig (1.110)-ből

$$P = \frac{1}{\kappa + 1} \frac{E}{V} = \frac{1}{\kappa + 2} n \hat{\mu}. \quad (1.120)$$

$\hat{\mu}$ értékét ide (1.117)-ből beírva

$$P = \frac{1}{\kappa + 2} n \hat{\mu} = \frac{1}{\kappa + 2} \left[\frac{(\kappa + 1)N}{C_g} \right]^{1/(\kappa+1)} n^{\frac{\kappa+2}{\kappa+1}} \quad (1.121)$$

Ez a degenerált Fermi-gáz állapotegyenlete, de a plazmában az elfajult elektrongáz mellett egy nemelfajult ionkomponens is van. Az ionok $P_i = (n - n_e)k_B T$ parciális nyomása a fenti képlet által megadott elektronnyomáshoz képest nyilván elhanyagolható, hiszen arányuk $\sim (n - n_e)/n\psi_d \ll 1$. A sűrűség esetén viszont ez már nem áll. Ezért az elfajult plazma állapotegyenletében a nyomást az elektronok n_e számsűrűsége helyett célszerűbb a teljes ρ tömegsűrűséggel kifejezni. A kapcsolat nyilván

$$\rho = \mu_e m_H n_e \quad (1.122)$$

ahol μ_e az egy elektronra eső átlagos molekulásúly, amit teljes ionizáció esetére már korábban megadtunk (1.78). Így végül **az elfajult plazma állapotegyenlete**

$$P = K \rho^{\Gamma_1} = \begin{cases} K_1 \rho^{5/3} & \text{nemrelativisztikus esetben} \\ K_2 \rho^{4/3} & \text{ultrarelativisztikus esetben} \end{cases} \quad (1.123)$$

ahol a

$$\Gamma_1 = \frac{\kappa + 2}{\kappa + 1} = \begin{cases} 5/3 & \text{nemrelativisztikus esetben} \\ 4/3 & \text{ultrarelativisztikus esetben} \end{cases} \quad (1.124)$$

jelölést Γ_1 (1.19) definíciójával összhangban vezettük be. Az együtthatók értéke:

$$K = \frac{1}{(\kappa + 2)} (\mu_e m_H)^{-\Gamma_1} \left[\frac{(\kappa + 1)N}{C_g} \right]^{1/(\kappa+1)} \quad (1.125)$$

$$K_1 = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{20m_e(\mu_e m_H)^{5/3}} = 1,004 \cdot 10^{13} \mu_e^{5/3} \quad (\text{CGS}) \quad (1.126)$$

$$K_2 = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{ch}{8(\mu_e m_H)^{4/3}} = 1,244 \cdot 10^{15} \mu_e^{4/3} \quad (\text{CGS}) \quad (1.127)$$

A gyakorlatban érdekes esetekben (fehér törpék, elfajult hélium-csillagmagok...) a hidrogén gyakorisága elhanyagolható, így (1.78) szerint $\mu_e = 2$.

A "normális" fehér törpék túlnyomórészt szénből és kisebb részben oxigénből állnak, hiszen a vörös szuperóriás AGB csillagok elfajult C-O magjaiból alakulnak ki. Szoros kettős rendszerekben azonban létrejöhetnek héliumból álló, vagy oxigén–neon–magnézium keverék alkotta fehér törpék is.

Az erősen elfajult anyag sűrűségét növelve a Fermi-energia (1.117) szerint nő, és előbb-utóbb meghaladja az elektron nyugalmi energiáját. Mivel az elektronok átlagos energiája erős elfajulásnál $\epsilon_F/2$, így az elektronok relativisztikussá válnak. Azt a sűrűségértéket, amely a relativisztikus és nemrelativisztikus eseteket egymástól elválasztja, úgy becsülhetjük meg, hogy az (1.123)-ban megadott két állapotegyenlet jobb oldalát egyenlővé tesszük. Az eredmény $10^6 \mu_e \text{ g/cm}^3$.

Feladat: (Lehet-e fehér törpékben konvekció?) Határozzuk meg ∇_{ad} értékét elfajult plazmában, ha az elfajulás erős, de véges! (Vigyázat: az eredmény nem végtelen, amint azt az állapotegyenlet közelítő alakja alapján naivan vélhetnénk. A helyes eljárás (1.26) alkalmazása. A relativisztikus esetben pedig lényeges különbséget jelent a nemelfajult, nemrelativisztikus iongáz jelenléte.)

Feladat: Határozzuk meg az állapotegyenlet alakját teljes elfajulásnál az általános (relativisztikus) esetre!

ELFAJULT CSILLAGOK SAJÁTOSSÁGAI Az (1.123) állapotegyenlet sajátossága az ideális gázok (1.59) állapotegyenletével szemben, hogy benne a nyomás csak a sűrűségtől függ, a hőmérséklettől nem. Ennek fontos következménye, hogy az elfajult plazma nem lehet energetikai egyensúlyban: a környezetének sugárzással leadott hőt nem tudja állandó intenzitású termonukleáris reakciókkal pótolni. Ha ugyanis így állna a helyzet, ez az egyensúly nem volna stabil: mivel a termonukleáris reakciók intenzitása a hőmérséklettel erősen nő (ld. a 2. fejezetben), kicsiny véletlen (pl. a részecskék hőmozgása miatt fellépő) hőmérsékletemelkedés hatását a termelt többletenergia tovább fokozza, önerősítő folyamat indul meg, a hőmérséklet exponenciálisan megszalad, míg olyan magas értékeket nem ér el, hogy az elfajulás megszűnik. A nemelfajult anyagban viszont a hőmérsékletemelkedést kísérő nyomásnövekedés okozta tágulás kompenzálni tudja a hőmérsékletemelkedés hatását, és így stabilizálni képes az égést: így maradhatnak egyensúlyban a normális csillagok.

A fenti okokból a **hosszú ideig elfajult állapotban levő égitestek (pl. fehér törpék) belsejében termonukleáris reakciók nem folyhatnak.** (Kisintenzitású pikonukleáris reakciók igen, lásd a következő fejezetben.) **A fehér törpék tehát lassan hűlnek;** ez a lehűlés azonban évmilliárdokig elhúzódik.

Ha ugyanakkor az elfajult közegben mégis termonukleáris reakció indul meg, a vázolt instabilitás folytán az energiatermelés hirtelen felszökik, és az elfajulás megszűnik. Ez a jelenség játszódik le pl. a mérsékelt (kb. 2–3 naptömeg alatti kezdeti tömegű) csillagok fejlődése során a vörös óriás állapot végén, amikor a kiégett, elfajult héliummagban hirtelen begyullad az égés. A megszaladás, amelyet *héliumvillám*, vagy pontosabban *héliummagvillám* (He core flash) néven ismerünk, kívülről nézve nem látványos jelenség, mert mire a felszín eléri, hosszú (a Kelvin–Helmholtz időskála nagyságrendjébe eső) időre kenődik szét. A villám után fejlődik a csillag a horizontális ágra, nemelfajult magjában most már stabilan égetve a héliumot.

Az elfajult plazmából álló csillagok, azaz a fehér törpék további nevezetes sajátossága, hogy tömegük nem haladhat meg egy kritikus értéket, a nevezetes *Chandrasekhar-féle határt*.

Feladat: (A Chandrasekhar-féle határ) Mutassuk meg a viriáltétel felhasználásával, hogy az elfajult csillagok tömegének van felső határa, melynek értéke egy naptömeg nagyságrendű. (Használjuk fel, hogy a csillag tömörülése során az elfajulás egyre relativisztikusabb lesz, azaz $\Gamma_1 \nearrow 4/3$. A határ pontos értéke egyébként a politróp gázgömbök elmélete alapján $5.836/\mu_e = 1.46 M_\odot$.)

Feladat: (Preszupernóva kollapszus) Ugyancsak a viriáltétel alapján mutassuk meg, hogy $\Gamma_1 < 4/3$ esetén bármely csillag instabil!

ELFAJULT NEUTRONGÁZ Közönséges körülmények között a szabad neutronok nem stabilak, hanem mintegy 15 perc felezési idővel elbomlanak a

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \nu \quad (1.128)$$

β -bomlás során. A gáz nyugalmi rendszerében az itt keletkező elektron energiája nyilván nem lehet nagyobb a proton és neutron nyugalmi energiáinak különbségénél, 1,3 MeV-nél. ($T \ll 1,3 \text{ MeV}/k_B \sim 10^{10} \text{ K}$ hőmérsékleteket tekintünk, ahol a kezdetben nemelfajult neutrongázban a neutronok kinetikus energiája elhanyagolható a tömegdefektushoz képest.) Ha a relativisztikusan elfajult plazma Fermi-energiája ezt az értéket meghaladja, minden szóba jöhető szabad elektronállapot be lesz töltve, így a bomlás nem mehet végbe, és a neutronok stabilizálódnak, sőt a

$$p^+ + e^- \rightarrow n^0 + \tilde{\nu} \quad (1.129)$$

inverz β -bomlás során egyre több neutron képződik. Ez a jelenség a *neutronizáció*. A szabad neutronok nagyobb számban való megjelenése a plazmában ténylegesen csak $4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ sűrűség fölött kezdődik meg.

(1.117) alapján tkp. azt kapnánk, hogy a neutronizáció $\sim 3 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3$ sűrűségnél következik be. A valóságban azonban ezt a határt lényegesen megemeli az a körülmény, hogy a nukleonok atommagokká kombinálódva vannak jelen. Tipikus fehér törpében eredetileg a szénmagok a leggyakoribbak,

majd magasabb ($\rho \gtrsim 10^{10} \text{ g/cm}^3$) sűrűségeken a *piknonukleáris magreakciók* (ld. a következő fejezetet) következtében a nukleonok már nehezebb atommagokba kombinálva lesznek jelen. Az inverz β -bomlást így e magokra kell felírni:

$$(Z, A) + e^- \rightarrow (Z, A + 1) + \bar{\nu} \quad (1.130)$$

s küszöbenergiája jóval nagyobb lesz a szabad protonokénál, mivel a keletkező neutron a nehéz atommag nukleonhéjszerkezetének megfelelő legalacsonyabb szabad energiaszintre kell emelni. A sűrűség növekedése így csak a nukleáris egyensúlyi eloszlás módosulását, egyre neutrondúsabb magok megjelenését hozza, és csupán mintegy $4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ sűrűség fölött kezdődik meg a már túlságosan is neutrondús magokból a neutronok spontán “kicsöpögése”.

Az elfajult elektrongáz nyomása még mindig domináns, de az elektronbefogás miatt állapotegyenletük “fellágyul”, azaz Γ_1 valamivel $4/3$ alá csökken.

A sűrűséget tovább növelve a neutrongáz elfajul, és nyomása dominánssá válik. Végül a $2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ *nukleáris sűrűség* (az atommagok sűrűsége) táján a különálló atommagok végleg eltűnnek. Ebben a tartományban az állapotegyenlet helyes alakja ma még nem ismeretes. Ennek következtében pedig kétes a neutroncsillagok maximális tömege is. (Annnyit tudunk, hogy ez a határ valahol 1,5 és 3 naptömeg között lehet; újabban inkább az alsó határ közelében fekvő értékeket tartják valószínűbbnek.)

Ha a neutronok között nem volna kölcsönhatás, elfajult ideális Fermi-gázként az (1.121) állapotegyenletet követnék, m_e helyett m_n -nel. Azonban éppen a nukleáris sűrűség tájékán válik jelentőssé a neutronok közötti erős kölcsönhatás, ami az állapotegyenletet teljesen megváltoztatja.

Megjegyzendő, hogy a relativisztikus esetben a neutronizált plazma állapotegyenlete még a nukleonok kölcsönhatását elhanyagolva sem egyezik meg (1.123)-vel. Ennek oka az, hogy itt a neutronok számsűrűsége nem lesz arányos a ρ tömegsűrűséggel, hiszen azt a *gravitáló*, azaz a teljes és nem a nyugalmi tömeg adja. Ezért az “ultrarelativisztikus limitben” — ha volna ilyen — az állapotegyenlet $P \propto \rho$ alakú lenne ($\Gamma_1 = 1$). Tehát a $\Gamma_1 = 4/3$ értéket már a relativisztikus tartomány kezdetén eléri a közeg, márpedig e fölé, mint a feladatok megoldása során láttuk, Γ_1 valódi csillagban annak összeomlása miatt nem emelkedhet.

A “neutrongázt” az állandóan jelenlevő β - és inverz β -bomlások egyensúlya miatt-voltaképpen neutrongáz, protongáz és elektrongáz elegye alkotja; a dinamikus egyensúly azonban tényleg erősen a neutronok javára billen (arányuk legalább 99%). 10^{15} g/cm^3 sűrűség fölött a neutronok Fermi-nívója meghaladja a hiperonok nyugalmi tömegét, így az elegyben ilyen részecskék — sőt még nagyobb sűrűségeken akár kvarkok is — is megjelenhetnek.

A nukleáris sűrűség fölött, $T < 10^{10} \text{ K}$ esetén a neutronok ellentétes spinű *párokba* rendeződhetnek. (Az ilyen “kétneutronos atommagok” normál sűrűségeken nem stabilak.) E párok zéró spinűek lévén bozonok, s az általuk alkotott Bose-gáz erősen elfajult, ami a (1.101) Bose–Einstein eloszlás szerint azt jelenti, hogy szinte kizárólag az ($\epsilon = \hat{\mu}$ energiájú) alapállapot van betöltve. A bozonoknak ez az impulzustérben való “kiülepedése” a *Bose-kondenzáció*. (Kimutatható, hogy a hagyományos fázisátalakulásokhoz hasonló tulajdonságokat mutat.) A Bose-kondenzátumban nemigen áll rendelkezésre energia a részecskék gerjesztéséhez, így **a neutrongáz szuperfolyékony**; a protonokból képződő hasonló Bose-kondenzátum szuperfolyékonyága miatt pedig **szupravezető is**.

1.7 HŐMÉRSÉKLETI SUGÁRZÁS

FOTONGÁZ A Bose–Einstein statisztika legfontosabb asztrofizikai alkalmazását a termikus egyensúlyban levő fotongáz, vagyis a *hőmérsékleti sugárzás* jelenti. Ennek gyakorlati megvalósítása az állandó hőmérsékletű tartályt kitöltő sugárzás, az *üregsugárzás*.

Mint (1.101)-ből látható, Bose–Einstein gáz minden állapotára teljesülnie kell az $\epsilon > \hat{\mu}$ feltételnek, hiszen a betöltési szám nem lehet negatív. Eszerint tehát $\hat{\mu}$ fizikai jelentése itt a legalacsonyabb részecskeenergia, az alapállapot energiája. A fotonok $\epsilon = h\nu$ energiájának viszont nincs pozitív alsó korlátja, így rájuk szükségképpen $\hat{\mu} = 0$. (Nyugalmi tömeggel rendelkező részecskékre ennek nem kell így lennie, hiszen ekkor m_0c^2 alsó korlátot jelent.) Tehát **a fotonok** — általában a tömeg nélküli részecskék — **kémiai potenciálja zérus**.

A nulla kémiai potenciál összhangban van azzal a ténnyel, hogy a fotonszám nem állandó: az üregsugárzás fotonjai az üreg falában elnyelődhetnek ill. emittálódhatnak. Eszerint tehát a fotongáz extenzív termodinamikai állapotjelzői között N nem szerepel: $S = S(E, V)$ avagy $E = E(S, V)$ csupán, azaz $\hat{\mu} \equiv \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S, V} = 0$.

A PLANCK-TÖRVÉNY Az egyensúlyi fotongázban az $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$ közötti energiájú fotonok által képviselt energiasűrűséget (1.104) integrandusa adja, ha benne a Bose–Einstein statisztikának megfelelően a $-$ előjelet használjuk, és a $g(\epsilon)$ statisztikus súly helyére behelyettesítjük (1.52) ultrarelativisztikus esetét, $g_s = 2$ spin-multiplicitással, a $V = 1$ térfogategységre felírva. Az $\epsilon = h\nu$ helyettesítéssel a monokromatikus [azaz $(\nu, \nu + d\nu)$ frekvenciaintervallumba eső fotonok által képviselt] energiasűrűség $u_\nu d\nu$, ahol az u_ν frekvencia szerinti eloszlás

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad (1.131)$$

A sugárzáselméletben az energiasűrűség helyett gyakran az irányeloszlásról is információt adó *intenzitást* használjuk. Az $I_\nu(\theta, \phi)$ **intenzitás** definíciója az, hogy a $(\nu, \nu + d\nu)$ frekvencia-intervallumba eső, a θ, ϕ polárszögekkel jellemzett irány körüli $d\omega$ térszögben terjedő sugárzás által a θ, ϕ normálisú $d\sigma$ felületelemen dt idő alatt átvitt energia:

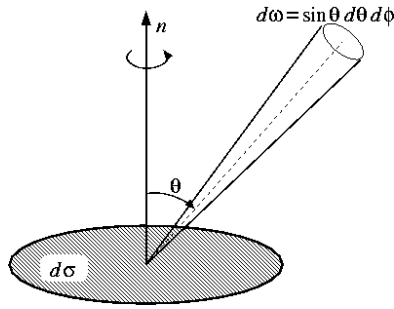
$$dE_\nu = I_\nu d\nu dt d\sigma d\omega. \quad (1.132)$$

Ezek szerint a $d\sigma$ -n áthaladt adott irányú fotonok dt idő alatt $c dt$ utat megtéve, egy $dV = c dt d\sigma$ térfogatot töltenek ki, vagyis a monokromatikus energiasűrűséghez $dE/dV d\nu = I_\nu d\omega/c$ járulékot adnak. Ezt az irány szerint integrálva:

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} I_\nu \quad (1.133)$$

ahol az utolsó egyenlőség izotrop esetre vonatkozik. (1.131) és (1.133) alapján tehát

$$I_\nu = B_\nu(T) \equiv \frac{2h}{c^2} \nu^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad (1.134)$$



4. ábra: A fluxus definíciójához

Az intenzitást ki lehet fejezni a frekvencia helyett a $\lambda = c/\nu$ hullámhossz függvényében is, oly módon, hogy az adott frekvencia- ill. hullámhossz-intervallumba eső energia $I_\nu d\nu = -I_\lambda d\lambda$, azaz

$$I_\lambda = B_\lambda(T) \equiv -I_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1} \quad (1.135)$$

Az intenzitás mellett a másik nagyon gyakran használt sugárzásjellemző a *sugárzási fluxus*. Ez definíció szerint egy kiválasztott $d\sigma$ felületelemen dt idő alatt átáramló teljes energia. Mivel ha a $d\sigma$ felületelem nem merőleges a terjedési irányra, hanem normálisa azzal mondjuk θ szöget zár be, akkor $d\sigma$ helyére természetesen a felületelemnek a θ, ϕ irányú vetülete, $\cos\theta d\sigma$ kerül (4. ábra), így ($d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$) a fluxus:

$$H_\nu \equiv \pi F_\nu = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu d\nu dt d\sigma \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi. \quad (1.136)$$

Izotrop sugárzási térben (így pl. termikus egyensúlyban) a szögintegrál értéke π , azaz ekkor $F_\nu = I_\nu$. (Ez magyarázza az F_ν normált fluxus előtti látszólag önkényes π faktort a fenti definícióban.)

Az (1.135) *Planck-függvény* alakja különböző hőmérsékletértékekre a 5. ábrán látható. Deriválással könnyen megmutatható, hogy a függvény maximuma és a hőmérséklet között a

$$\lambda_{max} T = \text{const.} = 2897 \mu\text{m K} \quad (1.137)$$

összefüggés áll fenn: ez a **Wien-féle eltolódási törvény**.

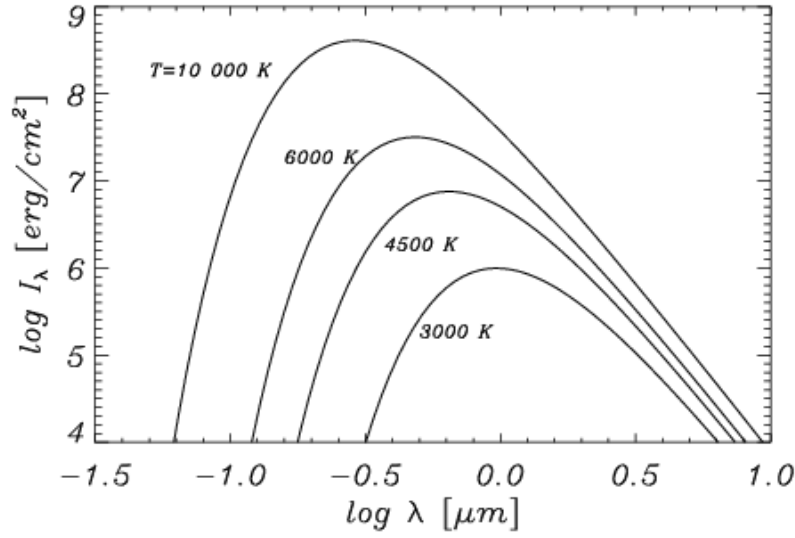
A Wien-törvényt empirikus úton már Wien előtt, 1884-ben felismerte Kövesligethy Radó magyar csillagász, aki ekkor az ógyallai csillagvizsgáló munkatársa volt. Kövesligethy később évtizedeken át vezette egyetemünk csillagászati tanszékét (akkori nevén a Kozmográfiai Intézetet).

(1.131) vagy (1.134) frekvencia szerinti integrálásával viszont a **Stefan–Boltzmann törvény**hez jutunk:

$$I(T) = B(T) \equiv \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad u(T) = \frac{4\pi}{c} B(T) = aT^4, \quad (1.138)$$

ahol a

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4} = 5,67 \cdot 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$$



5. ábra: A Planck függvény

Stefan–Boltzmann konstans és az

$$a = 7.56591 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3}\text{K}^{-4} = 7.56591 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3}\text{K}^{-4}$$

Stefan-konstans között a

$$\sigma = \frac{ac}{4} \quad (1.139)$$

összefüggés áll fenn.

Levezetés:

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\exp \frac{h\nu}{k_B T} - 1} = \frac{48\pi h}{c^3} \underbrace{\zeta(4)}_{\pi^4/90} = aT^4, \quad (1.140)$$

ahol $\zeta(s)$ a Riemann-féle ζ -függvény:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt,$$

$\Gamma(s)$ pedig a jól ismert gammafüggvény.

Ugyanígy a teljes fotonszám az alábbi alakban áll elő:

$$n = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3.$$

A relativisztikus fotongázra az állapotegyenlet (1.110)-beli második alakját felírva kapjuk a fotongáz nyomását, vagyis a *sugárnyomást*:

$$\boxed{P_r = \frac{1}{3}aT^4} \quad (1.141)$$

A sugárnyomás tehát a sűrűségtől nem függ, de a hőmérséklettel igen meredeken nő. Eszerint tehát adott sűrűségen egy kritikusanál nagyobb hőmérsékleten a sugárnyomás

meghaladja a gáznyomást, dominánssá válik. Ez a helyzet pl. egyes korai típusú csillagok belsejében.

Az eddigiek alapján már könnyen meghatározható a sugárzás térfogategységenkénti fajhője és entropiasűrűsége is:

$$C_v/V = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V = 4aT^3 \quad (1.142)$$

$$S/V = \frac{u + P}{T} = \frac{4}{3} \frac{u}{T} = \frac{4}{3} aT^3 = 4 \frac{u}{T} \quad (1.143)$$

Rövid hullámhosszakon, azaz nagy energiákon ($h\nu/k_B T \gg 1$ "nemelfajult limit") a Planck-függvény helyett a *Wien-közelítés* használható:

$$I_\nu(T) \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right), \quad (1.144)$$

hosszú hullámhosszakon viszont $h\nu/k_B T$ szerinti sorfejtéssel a *Rayleigh-Jeans közelítés* adódik:

$$I_\nu(T) \simeq 2 \frac{\nu^2}{c^2} k_B T. \quad (1.145)$$

Feladat: II. típusú szupernóvarobbanáskor az összeomlott csillagmag olyan sűrű, hogy (a neutronizáció során, inverz béta-bomlásban nagy mennyiségben létrejövő) neutrínók számára átlátszatlan. Az átlátszatlan tartomány határát neutrinoszférának nevezzük. Milyen lesz az észlelt hőmérsékleti neutrínósugárzás spektruma, ha (a legújabb mérésekkel szemben) feltételezzük, hogy a neutrínó tömege zérus, és a neutrinoszféra hőmérséklete $T = 3 \cdot 10^9$ K?

HŐMÉRSÉKLETFAJTÁK A végtelen izoterm közeg természetesen absztrakció. Gyakorlatilag a termikus egyensúly akkor áll fenn jó közelítéssel (a sugárzási tér akkor lesz a fent leírthoz nagyon hasonló), ha a hőmérséklet változásának karakterisztikus hossza messze meghaladja a többi jellemző fizikai hosszúságot. **Termikus egyensúly hiányában** viszont a fenti összefüggések nem érvényesek, vagyis a fenti módszerekkel végzett hőmérsékletmérések egymástól eltérő eredményre vezetnek. Ilyenkor különböző hőmérsékletfajtákról beszélünk.

- Effektív hőmérséklet** (T_{eff}). (1.138) definiálja, tehát a mérttel azonos összintenzitású feketesugárzás hőmérsékletparamétere.
- Sugárzási hőmérséklet** (T_{rad}). Olyan feketesugárzás hőmérsékletparamétere, melynek a megfigyelési tartományban mért összintenzitása megegyezik a csillagéval. Nyilván $T_{rad} = T_{eff}$, ha a színeképtartományt minden határon túl tágítjuk.
- Fényességi hőmérséklet** (T_b). Olyan feketesugárzás hőmérsékletparamétere, melynek intenzitása egy kiválasztott hullámhosszon megegyezik a csillagéval (tehát (1.135) definiálja). Általában a rádiótartományban használják, egyszerűen az intenzitás mértékeként (ilyenkor a Rayleigh-Jeans közelítéssel definiálják).
- Színhőmérséklet** (T_c). Olyan feketesugárzás hőmérsékletparamétere, amely a megfigyelési színeképtartományban legjobban közelíti az észlelt intenzitáseloszlást. (1.135) valamely differenciahányadosa (vagyis egy színindex) definiálja.
- Wien-féle hőmérséklet** (T_W). Olyan feketesugárzás hőmérsékletparamétere, amelynek maximális intenzitáshoz tartozó hullámhossza a mérttel egyező (tehát (1.137) definiálja).

- (f) **Kinetikus hőmérséklet** (T_{kin}). (1.58) definiálja. A részecskék átlagos sebssége a színeképvonalak Doppler-kiszélesedéséből nyerhető. Az elektronok kinetikus hőmérsékletét elektronhőmérsékletnek nevezzük. (Ekkor $\mu = 1/1840$.)
- (g) **Ionizációs hőmérséklet** (T_i). Az (1.88) Saha-formula definiálja. P_e ugyancsak a vonalprofilokból nyerhető, $n_{0,s}$ -t viszont a vonalak relatív erősségéből kapjuk, A Fowler–Milne elmélet szerint.
- (h) **Gerjesztési hőmérséklet** (T_e). Az (1.80) Boltzmann-formula definiálja.

A csillagok Wien-féle hőmérsékletének első meghatározása 1902-ben Harkányi Béla magyar csillagász nevéhez fűződik. Harkányi az ógyallai csillagvizsgálóban dolgozott, majd egyetemünk csillagászati tanszékének (akkori nevén: Kozmográfiai Intézet) munkatársa lett.

1.8 ÖSSZEFOGLALÁS: AZ ÁLLAPOTSÍK

AZ ÁLLAPOTSÍK Az asztrofizikai plazmák állapotegyenletéről szerzett ismereteinket legtömörebb formában úgy összegezzük, ha a ρ - T *állapotsíkon* bejelöljük azon tartományokat, ahol az eddig tárgyalt effektusok közül egyik vagy másik dominál (azaz ad a nyomáshoz döntő járulékot) (6. ábra).

Kiindulópontként az ideális gáz állapotegyenletét tekintve, s az attól vett eltéréseket vizsgálva, először is az (1.59) és (1.141) kifejezések összevetésével könnyű megállapítani, hogy a sugárnyomás a gáznyomással szemben dominánssá válik, ha

$$\log T > \frac{1}{3} \log \rho + C \quad C = \frac{1}{3} \log(3\mathcal{R}/a\mu) = 7.51 - \frac{1}{3} \log \mu \quad (\text{CGS})$$

E határvonalat a 6. ábrán a $\mu = 1$ esetre húztuk be. (Mint már a (1.77) formulánál láttuk, μ teljesen ionizált gázra mindig 0.5 és 2 közé esik.)

Ehhez hasonló módon (1.59) és (1.123) összehasonlításával megállapíthatjuk, hogy a nemrelativisztikusan elfajult ($\rho < 10^6 \mu_e \text{ g/cm}^3$) elektrongáz nyomása a

$$\log T < \frac{2}{3} \log \rho + C \quad C = \log(K_1\mu/\mathcal{R}) = 5.08 + \log \mu - \frac{5}{3} \log \mu_e \quad (\text{CGS})$$

feltétel teljesülése esetén lesz domináns, míg a relativisztikus elfajulás sűrűségtartományában ($\rho > 10^6 \mu_e \text{ g/cm}^3$) a feltétel alakja

$$\log T < \frac{1}{3} \log \rho + C \quad C = \log(K_2\mu/\mathcal{R}) = 7.17 + \log \mu - \frac{4}{3} \log \mu_e \quad (\text{CGS}).$$

A határvonalakat az ábrán a $\mu_e = 2$ esetre húztuk be.

Az elfajult plazma további sűrítése során bekövetkező, fentebb tárgyalt változásokat ugyancsak feltüntettük az ábrán, akárcsak a Saha-egyenlet hozzávetőleges érvényességi határát.

KRISTÁLYOSODÁS Az eddigiekben nem vizsgáltuk a gáz részecskéi között fellépő esetleges fizikai kölcsönhatásokat. Az adott hőmérséklettartományban plazmáról lévényszó, ezek a Coulomb-erők. Amíg a Coulomb-erők jelentősége aránylag csekély, a közeg gáz halmazállapota fennmarad, s az állapotegyenletben csupán (itt nem tárgyalt) másodlagos korrekciókat okoznak. Ha azonban a részecskék közötti Coulomb-kölcsönhatás energiája

$\sim k_B T$ (hő)mozgási energiájukat meghaladja, az erők a részecskéket rácsba rendezhetik: az anyag *kristályosodik*. Ennek feltétele tehát az, hogy

$$\Gamma_C = \frac{Z_i e^2}{r_i k_B T} \sim \frac{Z_i^2 e^2 n_i^{3/2}}{k_B T} = 3 \cdot 10^{-3} \frac{Z_i^2 n_i^{1/3}}{T} \quad (1.146)$$

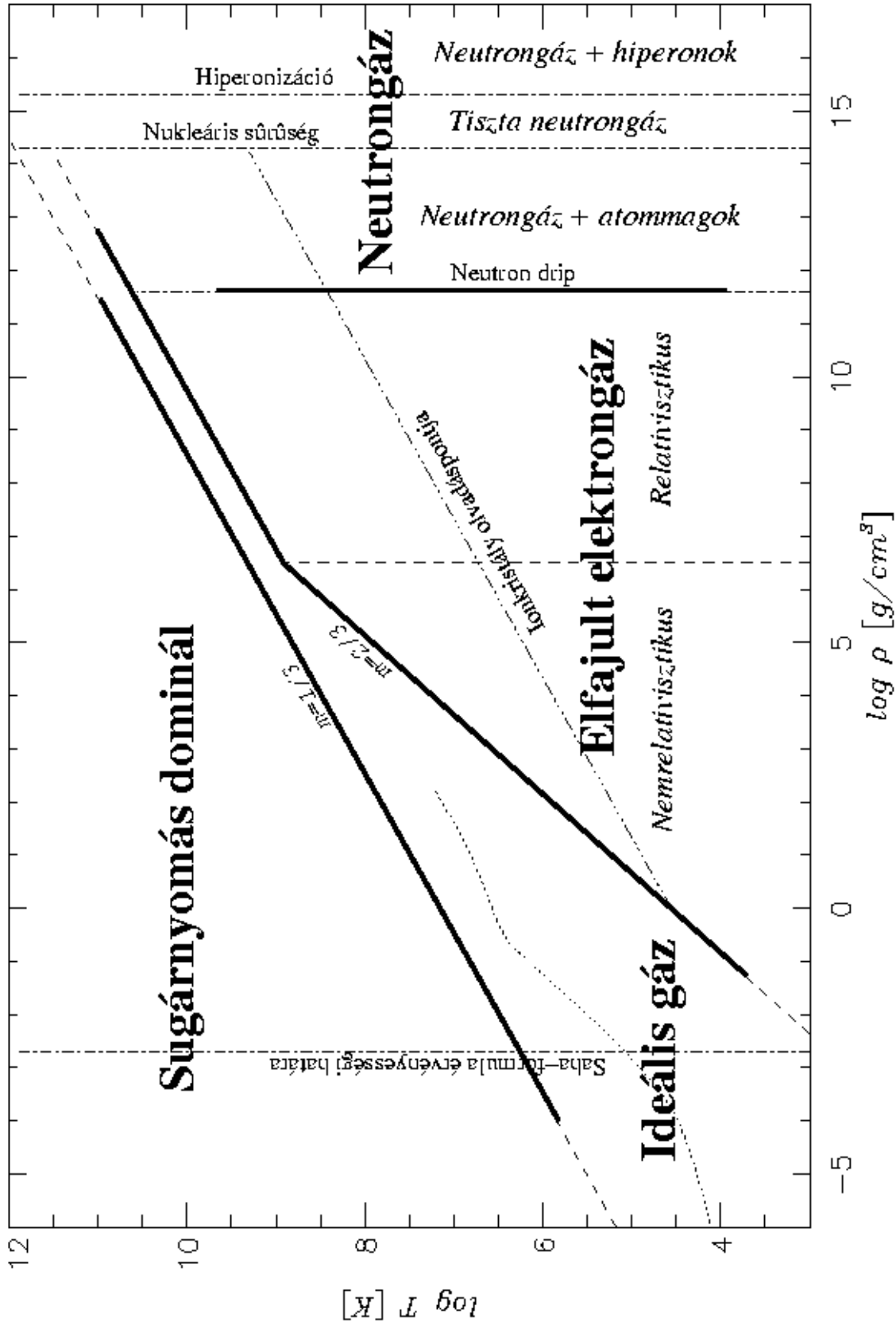
A feltételt az ionokra írtuk fel, mert az elfajult elektrongázban az elektronok energiája $\gg k_B T$, így a feltétel az ionokra sokkal könnyebben teljesül. Z_i , r_i és n_i tehát az ionok rendszáma, átlagos távolsága ill. számsűrűsége. A részletesebb modellek szerint Γ_C kritikus értéke 100 körül van, így a kristályosodás feltétele

$$\log T < \frac{1}{3} \log \rho + C \quad C = 3.36 + 2 \log Z_i - \frac{1}{3} \log \mu_0 \quad (\text{CGS})$$

Az ábrán a határt a $Z_i = 6$, $\mu_0 = 12$ esetre húztuk be (szénből álló fehér törpék). A $\rho > 10^{10} \text{g/cm}^3$ tartományban viszont a piknonukleáris reakciók miatt már a nehezebb magok dominálnak, ezért itt a valóságban a görbe kissé följebb csúszik.

Az ionok kristályrácsba rendeződése következtében a neutroncsillagok külső rétegei szilárd halmazállapotúak. Gyorsan forgó neutroncsillagokban (pulzárokban) a forgó kéregben a pulzár fékeződése miatt felhalmozódó mechanikai feszültségek időnként a kéreg elpattánásához “csillagrengéshez” vezetnek. Ilyenkor tehetetlenségi nyomatéknak a tömegátrendeződést kísérő hirtelen változása miatt az egyébként fokozatosan lassuló pulzár forgási periódusa hirtelen megváltozik (többnyire felgyorsul): a pulzár ugrik egyet (glitch).

A fehér törpék kihülésének előrehaladott stádiumában (fekete törpék) az elméleti modellek alapján szintén a külső rétegek, majd az egész csillag kristályosodása várható.



6. ábra: Az asztrofizikai plazma állapotfűje. A pontozott görbe a standard napmodell.

2. NUKLEÁRIS ASZTROFIZIKA

2.1 A MAGERŐK TULAJDONSÁGAI

ERŐS KÖLCSÖNHATÁS ÉS MAGERŐK Az erős kölcsönhatás a négy ismert alapvető fizikai kölcsönhatás egyike. Alapvető jellegzetessége, hogy hatótávolsága — az elektromágneses és gravitációs kölcsönhatással ellentétben — nem végtelen, sőt mikroszkopikusan kicsiny. Ezért kizárólag kvantumtérelméleti leírása létezik: ez a *kvantumszíndinamika* vagy *kvantumkromodinamika*, elterjedt idegen rövidítéssel *QCD*.

Az egyféle gravitációs töltéssel (pozitív tömeg) és a kétféle (pozitív vagy negatív) elektromos töltéssel ellentétben az erős kölcsönhatás szempontjából háromféle töltés létezik. Ahogyan az elektrodinamikában az azonos nagyságú, de különböző előjelű töltések semlegesítik egymást, úgy a QCD-ben három különböző, azonos nagyságú töltésre igaz ugyanez. Ez analógát mutat a színek keverésével, ezért az erős kölcsönhatás elméletében a töltéseket *színtöltésnek* nevezik, és a “kék”, “zöld”, “piros” elnevezésekkel illetik őket. Az elmélet további sajátossága, hogy az erős kölcsönhatást közvetítő *gluonok* — a semleges fotonokkal ellentétben — maguk is rendelkeznek színtöltéssel.

Színtöltéssel az alapvető részecskék közül — a gluonok mellett — csak a kvarkok rendelkeznek, tehát az erős kölcsönhatásban csak ők vesznek részt. A három különböző színű kvarkból álló kötött rendszerek a *barionok*, melyek közül a legkisebb tömegűek a *nukleonok*, vagyis a proton és a neutron. Ugyancsak színtelen, de csak két kvarkból álló összetett részecskék a *mezonok*. A mezonok és barionok gyűjtőneve: *hadron*.^{*} Az erős kölcsönhatás véges hatótávolsága annyit tesz, hogy egy kvark hadronból való kiszakításához irdatlan nagy, aszimptotikusan végtelen, energia szükséges, így a kvarkok a hadronokba be vannak zárva: szabad kvark nem létezik. Igen nagy részecskeenergiák esetén viszont a kölcsönhatás jellege megváltozik, ezért az Univerzum nagyon korai állapotában (ma pedig óriási részecskegyorsítóknál, pillanatokra) szabad kvarkok létezése is lehetséges.

Bár a nukleonok a többi hadronhoz hasonlóan színtelenek, az erős kölcsönhatás mégis képes őket magasabb szintű kötött rendszerekbe, atommagokba szervezni. A jelenség analóg azzal, ahogyan az elektromosan semleges atomok az árnyékolt elektromágneses kölcsönhatás révén molekulákká szerveződnek. **A magerők tehát az erős kölcsönhatás árnyékolt változata.** Mivel a magerők forrásai, a nukleonok színtelenek, így a magerők közvetítő részecskéje a legkisebb tömegű — s így az árnyékolt színtérben virtuális részecskéként legkönnyebben materializálódó — színtelen gluonrendszer: a π -mezon vagy *pion* (ld. 1. függelék).

A kvantumtérelméletben a fizikai mezőket virtuális részecskék sokaságának fogjuk fel (amiképpen Fourier-analízissel a klasszikus erőtér is síkhullámok összességével helyettesíthető). Mivel a pionok tömege véges, a határozatlansági reláció értelmében élettartamuk is az: $\tau_\pi \sim \hbar/m_\pi c^2$. Így virtuális részecskéként csak $r_0 = c\tau_\pi = 1,44 \cdot 10^{-13}$ cm távolságig juthatnak el, azaz a nukleonok is csak ilyen távolságon belül cserélhetnek virtuális mezonokat. **A magerők hatótávolsága tehát véges.** Legegyszerűbb elméletükhöz Yukawa nyomán úgy jutunk, ha feltételezzük, hogy hatótávolságukon belül potenciáljuk viselkedése az elektromágneses kölcsönhatásával analóg, míg ezen túl — a pion bomlási statisztikáját követve — exponenciálisan levág.

^{*}Az elnevezések a görög barisz (nehéz), meszosz (közepes), hadrosz (vaskos) szavakból erednek. A leptonok neve viszont a leptosz (kicsiny, vékony) melléknévből származik. A kvarkok nevét “feltalálójuk”, Gell-Mann, James Joyce: Finnegan’s Wake c. regényéből merítette.

A nukleonok közötti magerők potenciáljának legelemibb modellje, a *Yukawa-potenciál* tehát az árnyékolt potenciál tipikus esete:

$$U(r) = -g_Y \frac{\exp(-r/r_0)}{r} \quad (2.1)$$

ahol tehát $r_0 = 1,44 \cdot 10^{-13}$ cm.

A mérési adatok alapján $g_Y^2 \simeq \hbar c$, ami két nagyságrenddel nagyobb e^2 -nél. Tehát két proton között $r \lesssim r_0$ esetén a magerők $g_Y U$ potenciális energiája vagy százszor nagyobb az ugyanilyen szeparációjú protonok közti elektrosztatikus taszítás e^2/r , és 10^{40} -szer nagyobb a köztük fellépő gravitációs vonzás Gm_p^2/r potenciális energiájánál. Ebben az értelemben állíthatjuk, hogy az erős kölcsönhatás valóban minden más ismert kölcsönhatásnál sokkal erősebb.

Az egyszerű (2.1) skalárpotenciál azonban korántsem ad számot a magerők minden lényeges tulajdonságáról. Így pl. a kísérleti adatok (elsősorban a kötési energiáknak az alább tárgyalandó Weizsäcker-féle képlettel való jó egyezése) arra utalnak, hogy a **nukleonok atommagon belüli tipikus távolsága** is, számuktól (az A tömegszámtól) függetlenül, **mindig kb.** r_0 . Ennek következtében a nukleonok által “tapasztalt” potenciál értéke a mag méretétől függetlenül mindig ugyanakkora, kb. 40–50 MeV; a mag sűrűsége pedig sohasem haladja meg a kb. 1 nukleon/ $(4\pi r_0^3/3)$ értéket. Ezt a jelenséget nevezzük a kötési energia ill. a magsűrűség *telítődésének*. A telítődés a fenti, tisztán helyfüggő, vonzó potenciállal nem, csak annak a kísérleti adatokhoz illesztett, bonyolultabb általánosításával magyarázható meg.

A magerők további jellegzetessége aránylag erős *spinfüggésük* (sokkal erősebb, mint az elektronok LS-csatolása). Párhuzamos spinű nukleonok között a vonzás erősebb, mint ellentett spinek esetén. Ugyanakkor a Pauli-elv miatt azonos spinekkel ugyanazon állapotban (pl. az alapállapotban) csak különböző nukleonok lehetnek. Ez magyarázza, hogy a csupán egyetlen kötött állapottal rendelkező deuteronban egy protont neutronra cserélve (vagy megfordítva), a kötés megszűnik: a héliumnak nincs 2 tömegszámú izotópja, és két neutronból álló kötött rendszer sem létezik.

KÖTÉSI ENERGIA Egy Z rendszámú (azaz protonszámú), A tömegszámú atommag $Q(Z, A)$ kötési energiája az az energia, melyet a mag nukleonokra bontásához be kell fektetnünk. Megfordítva, a mag fúziós folyamatokban történő felépülésével éppen $Q(Z, A)$ energia szabadítható fel. A csillagok energiatermelése szempontjából tehát nagy jelentőségű a kötési energiák ismerete.

A spinfüggésen és a kicserélődési kölcsönhatáson alapuló, a deuteron létét magyarázó fenti gondolatmenet alapján azt várhatjuk, hogy általában az $A = 2Z$ tömegszámú izotópok lesznek egy elem legstabilabb változatai. Ez a várakozás alacsony rendszámú elemeknél tényleg teljesül is, a magasabb rendszámú elemek magjaiban viszont a sok proton elektrosztatikus taszítása miatt a két nukleonfajta szimmetriája megbomlik, a legstabilabb izotópok neutronokban gazdagabbak lesznek. Az ehhez hasonló gondolatmenetek kvantitatív összegzését nyújtja a kötési energiát megadó *Weizsäcker-féle képlet*,

$$Q(Z, A) = aA - bA^{2/3} - c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - eA \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + f\delta A^{-3/4} \quad (2.2)$$

melynek együtthatóit a kísérleti adatokhoz való illesztés útján határozták meg (MeV egy-

ségben):

$$a = 15,7 \quad b = 17,8 \quad c = 0,712 \quad e = 23,6 \quad f = 33,5 \quad (2.3)$$

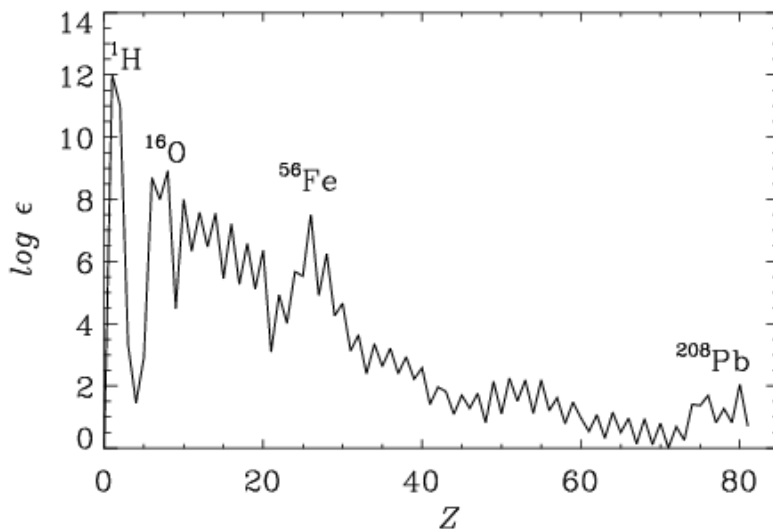
(2.2) jobb oldalán az egyes tagok értelmezése a következő.

Első tag: A magerők kis hatósugara folytán minden nukleon csak közvetlen, tőle kb. r_0 távolságra levő szomszédaival áll erős kölcsönhatásban. Így minden, más nukleonoktól körülvevett nukleonra ugyanakkora a kötési energia jut, ami A darab nukleonra összesen aA .

Második tag: Az atommag peremén elhelyezkedő nukleonoknak viszont csak feleannyi szomszédjuk lesz, mint a belsőknek, így kötési energiájuk is kisebb. Az első taggal tehát túlbecsültük a kötési energiát, amit a második taggal korrigálunk. A korrekció nyilván arányos lesz a mag felületén levő nukleonok számával, tehát a mag felszínével. Mivel minden nukleonra ugyanakkora térfogat (kb. egy r_0 sugarú gömb) jut, így a mag sugara $A^{1/3}$ -nal, felszíne pedig ennek négyzetével arányos.

Harmadik tag: A Z darab proton mindegyikére hat $(Z - 1)$ társának elektrosztatikus taszítása, ami a kötési energiát tovább csökkenti. A protonok átlagos távolsága a magban a mag sugarával, s így a fentiek szerint $A^{1/3}$ -nal arányos; ezzel tehát fordítva lesz arányos a páronkénti elektrosztatikus taszítás potenciális energiája.

Negyedik tag: Ez a tag a fentebb már ismertett kicserélődési kölcsönhatással (Pauli-elv) kapcsolatos effektust reprezentálja. Ennek megfelelően értéke $A = 2Z$ esetén zéró, egyébként negatív. Alakját egyértelműen rögzíti, hogy az egy nukleonra eső kötési energia kizárólag az $0.5 - Z/A$ relatív különbségtől függhet, és tetszőleges függvényt szélsőértéke körül sorbafejtve a vezető tag másodrendű lesz.



7. ábra: A kozmikus elemgyakoriság Grevesse (1984) adatai szerint. ϵ a 10^{12} db ^1H magra eső adott típusú magok gyakorisága. Az ábrán minden elem leggyakoribb izotópja szerepel. Az illó elemekre vonatkozó adatok a Nap színekévének elemzéséből, a többiek a meteoritek vizsgálatából származnak.

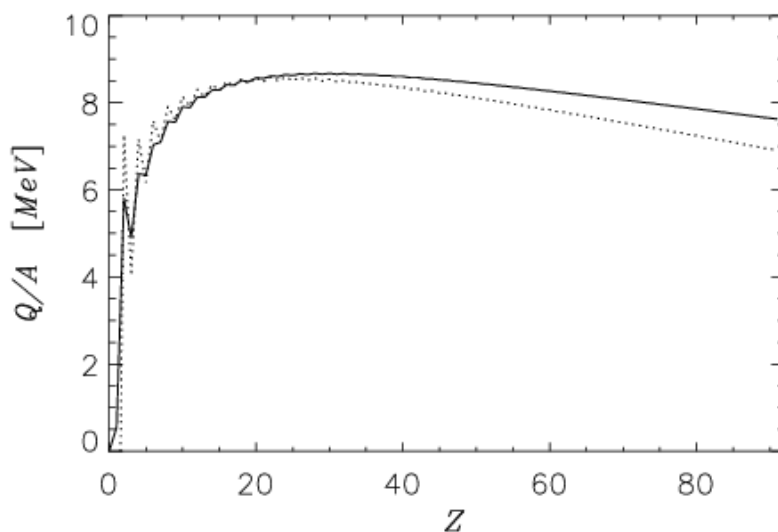
Ötödik tag: ez a tag — melynek ezt az alakját Fermi javasolta — az atommag héjszerkezetével kapcsolatos. δ értéke a proton- ill. neutronszám páros vagy páratlan voltától függ:

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{páros-páros} \\ 0 & \text{páros-páratlan} \\ -1 & \text{páratlan-páratlan} \end{cases}$$

hiszen páros nukleon esetén az utolsóként beépülő az előzőével megegyező energiájú héjra kerülhet

(ellentett spinnel), míg páratlan nukleon esetén már csak egyvel fentebbi héjra — így a kötési energia a páratlan nukleonszámoknál nagyobbat nő. E tag következménye, hogy, mint a 7. ábra[†] mutatja, a páros rendszámú elemek az Univerzumban gyakoribbak a páratlanoknál (*Harkins-szabály*).

Ugyancsak az atommagoknak az elektronburokéval analóg héjszerkezetével kapcsolatos, de a Weizsäcker-formulában nem reprezentált jelenség a különösen stabil “mágikus magok” (${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{208}\text{Pb}$) léte. E magok a zárt főhéjaknak felelnek meg, a nemesgázszerkezet atommagbéli megfelelői. A kozmikus elemgyakoriság-eloszlásban (7. ábra) különösen erős csúcsok mutatkoznak itt.



8. ábra: Az egy nukleonra eső kötési energia a rendszám függvényében, a Weizsäcker-képlet szerint. A folytonos vonal az egyes elemek legstabilabb izotópjait, a szaggatott görbe az egyenlő proton- és neutronszámú izotópokat mutatja

A Q/A egy nukleonra eső kötési energia (2.2)-ből számolt értékei a 8. ábrán láthatók. Mint kitűnik, a görbe határozott maximumot mutat a vascsoport elemeinél. A maximum pontos helye a feltételezett Z/A arány függvénye. $A/Z = 2$ esetén a leggyakoribb izotóp — a közelítő Weizsäcker-képlet helyett most a pontos kötési energiaadatokat tekintve — az ${}^{56}\text{Ni}$, míg minden elemre a legstabilabb izotópot vesszük, akkor az ${}^{56}\text{Fe}$. Mindenesetre a maximum léte arra utal, hogy a csillagok élete véges: a kezdetben főként hidrogénből álló gázban a nehezebb elemek fúziója legfeljebb addig szolgáltat energiát, míg a teljes gáz vassá ill. nikkellé nem alakul: az ennél nehezebb elemek felépülése már energiafogyasztó folyamat, mely a csillag egyensúlyához már nem járul hozzá, sőt annak összeomlásához vezet (szupernóvarobbanás). A legnehezebb elemek (pl. urán) esetében a fúzió helyett éppenséggel a maghasadás (fisszió) szolgáltat számottevő energiát.

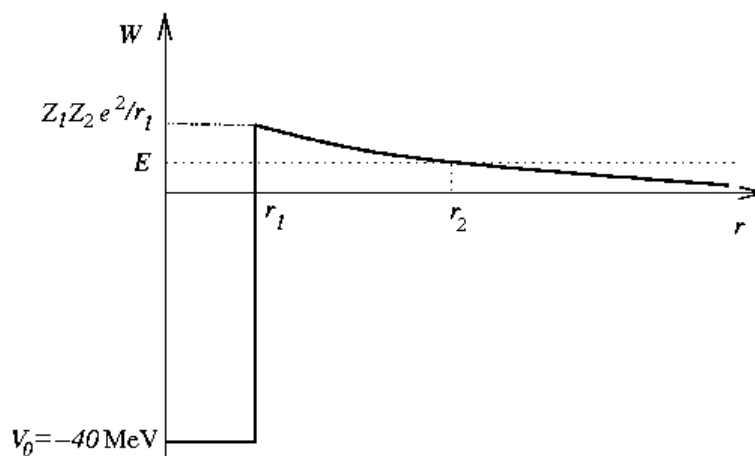
A 7. és 8. ábrát összevetve látható, hogy a vascsoport elemei körüli csúcs a kozmikus elemgyakoriság-eloszlásban már mutatkozik, de a maximum itt csak lokális: a hidrogén és hélium gyakorisága messze meghaladja a vasét. Az Univerzum kémiai evolúciója tehát még nem túl előrehaladott, anyagának zöme még igen távol áll a nukleáris egyensúlytól.

A 8. ábrát szemlélve az is szembeötlő, hogy a ${}^4\text{He}$ fajlagos kötési energiája, $Q/A = 6,6 \text{ MeV}$, a vasénak ($8,5 \text{ MeV}$) több, mint háromnegyede. Tehát mire a csillagbelső gáza

[†]Adatok: Grevesse (1984) Phys. Scripta T8, 49

héliummá alakult, a rendelkezésre álló energiakészlet háromnegyedét már felhasználta! Ez magyarázza azt a tényt, hogy a csillagok életük túlnyomó részét a fősorozaton töltik.

A csillag élete kb. 80 százalékát tölti a fősorozaton, a számszerű egyezés a fenti aránnyal azonban részben véletlen. Az óriásállapotban a csillag luminozitása jóval nagyobb, így a maradék egynegyednyi energiakészlet elvileg még rövidebb időre lenne elegendő — csak hogy a kintebbi rétegekben tovább folyó hidrogénégés még mindig hozzájárul az energiatermeléshez.



9. ábra: A Coulomb-gát. Z_1 és Z_2 rendszámú atommagok teljes W kölcsönhatási energiája a távolság függvényében. E energiájú részecske számára a gát az $r_1 \simeq r_n$ és r_2 rádiuszok között húzódik.

A COULOMB-GÁT Mivel az atommagok pozitív töltésűek, közöttük a magerók mellett elektrosztatikus taszító erők is fellépnek. Az eredő potenciál alakja a következő megfontolásból származtatható.

Mint említettük, a magon belül a nukleonok egymástól mind kb. r_0 távolságban vannak, így a magpotenciál értéke a minden nukleonra — azaz a magon belül mindenütt — ugyanakkora, mintegy 40–50 MeV. A mag — $r_n = A^{1/3}r_0$ sugarú — határán kívül aztán a nukleáris potenciál (2.1) szerint exponenciálisan eltűnik, így a Coulomb-potenciál szinte ugrásszerűen dominánssá válik. Két, Z_1 , Z_2 rendszámú és A_1 , A_2 tömegszámú, r szeparációjú mag eredő potenciális energiája tehát a 9. ábrán láthatóhoz hasonló alakú lesz. A gát magassága mintegy 10 MeV.

A magreakciók létrejöttéhez nyilván az szükséges, hogy kellően nagyszámú részecske győzze le ezt a gátat. Ehhez energiájuknak legalábbis meg kell közelítenie a Coulomb-gát magasságát. (Elérnie nem kell feltétlenül, ugyanis, mint alább látni fogjuk, a kvantummechanikai alagúteffetus révén némileg alacsonyabb energiájú részecskék is már számottevő valószínűséggel juthatnak át a gáton.)

Ez két esetben lehetséges:

Termonukleáris reakciók. Ha a hőmérséklet kellően magas (legalább több millió kelvin), a részecskék egy részének termikus sebessége elegendő lehet a Coulomb-gát legyőzéséhez. A legtöbb csillag magjában termonukleáris reakciók zajlanak.

Piknonukleáris reakciók. Extrém nagy sűrűségek ($\rho > 10^6 \text{ g/cm}^3$) esetén a Coulomb-gát magassága lényegesen csökken, így alacsonyabb hőmérsékleteken is átjárhatóvá válhat. Ez a reakciós mechanizmus a neutroncsillagok kialakulása során fontos.

A Coulomb-gát nagy sűrűségeken való csökkenésének magyarázata a szomszédos atommagok potenciáljainak a nyomási ionizációnál (1.4. szakasz) tárgyalthoz hasonló egymásra tolódása. Hozzájárul ugyanakkor az is, hogy nagy sűrűségeken a Debye-hossz (ld. később a Plazmafizika fejezetben) lényegesen csökken, így az elektrosztatikus taszítást a magok körül feltorlódott elektronfelhők nagymértékben leárnyékolják.

2.2 NUKLEÁRIS EGYENSÚLY

Ha a magreakciók olyan hevesek, hogy a közeg izotópösszetételét az egyéb fizikai folyamatokénál sokkal rövidebb időskálán képesek megváltoztatni, akkor úgy tekinthetjük, hogy ezen lassabb változások során az izotópösszetételt minden pillanatban a magreakciók dinamikus egyensúlya határozza meg. A fentieknek megfelelően ez a helyzet szélsőségesen forró, illetve sűrű közegekben valósulhat meg.

TERMONUKLÁRIS EGYENSÚLY A termonukleáris egyensúly esete igen forró ($T > 10^9$ K) plazmákban valósul meg. A neutronok és protonok száma a magokban ilyenkor összességében adott (a kettőt egymásba alakító folyamatok közül inverz β -bomlás a nem túl magas sűrűségeken gyakorlatilag nem megy végbe, a β -bomló izotópok pedig csekély gyakoriságúak). Ilyenkor, a maghasadást és a fúziót az ionizáció ill. rekombináció megfelelőjének tekintve, az egyensúlyi állapotot a Saha-egyenlethez hasonló egyenletek rendszere határozza meg. Lényeges különbség az ionizáció esetéhez képest, hogy itt a kötési energia a tömegszámmal nem monoton módon változik, aminek következtében az eloszlás csúcsát képező, leggyakoribb izotópok a paraméterekkel nem fokozatosan, hanem ugrásszerűen változnak.

Az említett egyenletekhez a következőképpen jutunk. Először is emlékeztetünk rá, hogy egyensúlyi rendszert A és B részre osztva a két rész egyensúlyban lesz, vagyis az 1.1. szakaszban mondtakat többkomponensű esetre általánosítva minden i összetevőjükre $\hat{\mu}_i^{(A)} = \hat{\mu}_i^{(B)}$. Így, ha rögzített nyomáson és hőmérsékleten anyagi kölcsönhatásba lépnek, akkor szabad entalpiájuk megváltozása

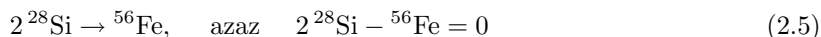
$$d(G^{(A \cup B)}) = \sum_i \left(\hat{\mu}_i^{(A)} - \hat{\mu}_i^{(B)} \right) dN_i = 0,$$

hiszen zárt rendszerről lévén szó, $dN_i^{(B)} = -dn_i^{(A)}$. Eszerint tehát kémiai egyensúlyban a szabad entalpia szélsőértéket vesz fel. (A szélsőérték különben minimum, ami az entrópia maximális volta alapján következtethető ki.)

Az extrémumelvet egy rendszer belső reakcióegyensúlyára kiterjesztve tehát adott reakció ill. reakciósorozat egyensúlyának feltétele

$$\sum_i \hat{\mu}_i dN_i = 0, \quad (2.4)$$

ahol a dN_i -k helyébe most az egyes komponenseknek a reakciósorozat nullára rendezett összegképletében szereplő együtthatója írandó. Ez a *részletes egyensúly elve*. Konkrétan pl. az alább tárgyalandó



reakció esetére (2.4) alakja

$$2\hat{\mu}_{\text{Si}} - \hat{\mu}_{\text{Fe}} = 0.$$

Az ideális gázok kémiai potenciáljára levezetett (1.60) összefüggést a (2.4)-be beírva, és egységnyi térfogatra vonatkoztatva, az egyensúlyi egyenlet:

$$\prod_i n_i^{dN_i} = \prod_i (z_i/V)^{dN_i} \quad (2.6)$$

Konkrét példánkra:

$$n_{\text{Si}}^2/n_{\text{Fe}}V = z_{\text{Si}}^2/z_{\text{Fe}} \quad (2.7)$$

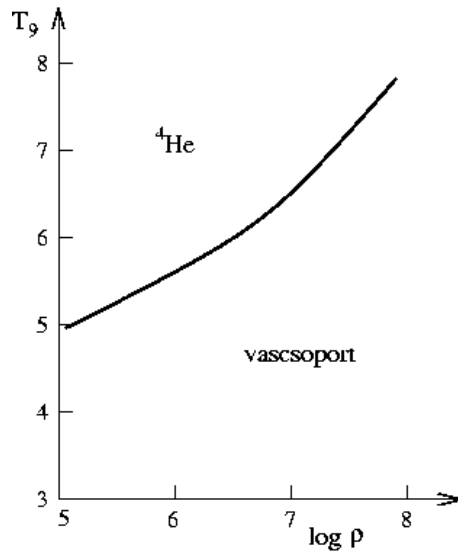
A Saha-egyenlettel való analógia nyilvánvaló, hiszen ha a részletes egyensúly elvét az

$$(r+1)\text{-szeres ion} + e^- \leftrightarrow r\text{-szeres ion}$$

ionizáció/rekombináció egyensúlyra alkalmazzuk, az eredmény

$$n_e n_{r+1}/n_r = (z_e/V)(z_{r+1}/z_r) \exp(-\chi_r k_B T), \quad (2.8)$$

ahol figyelembe vettük, hogy közös energia-zéruspontot választva az egyes ionok saját alapállapotaira vonatkoztatott állapotösszegek arányában megjelenik az $\exp(-\chi_r k_B T)$ szorzó. (Ugyanezt meg kell tenni magreakcióknál is, ha a mag alapállapotára vonatkoztatott állapotösszegeket használunk.) Ide z_e (1.53) kifejezését beírva a (1.87) Saha-egyenletet kapjuk.



10. ábra: A leggyakoribb izotópok termionukleáris egyensúly esetén a ρ - T síkon. (ρ g/cm³, T 10⁹ K egységekben)

A leggyakoribb izotópok a hőmérséklet és a sűrűség függvényében a 10. ábra szerint változnak. Alacsonyabb T ill. magasabb ρ értékeknél a várakozásnak megfelelően a vas-csoport elemei lesznek az uralkodók, amint azt már a 8. ábra alapján is sejthettük. (Hogy konkrétan melyikük, azt ismét csak a Z/A arány határozza meg.) Magasabb hőfokon ill. alacsonyabb sűrűségeknél ugyanakkor a gyorsan mozgó magokat az ütközések α -részecskékre tördelik.

A gyakoriságeloszlás Z és A függvényében igen meredek maximumot mutat a leggyakoribb izotóp körül, vagyis szinte az egész anyag 1-2 elem formájában lesz jelen. Ennek fontos gyakorlati következménye, hogy **az Ia típusú szupernóvarobbanások**, melyekben az anyag nukleáris egyensúlyig ég, **szinte kizárólag vasat és nikkelt szórnak szét a térbe**, akár több, mint egy naptömeget. Ez magyarázza ezen elemek kiugróan magas kozmikus gyakoriságát (7. ábra).

Feladat: 10^9 K hőmérsékletű, 1000 g/cm^3 sűrűségű tiszta oxigéngázban a termikus sugárzás fotonjai párkeltéssel elektron–pozitron párokat hozhatnak létre. A kvázineutralitás és a párkeltés-annihiláció dinamikus egyensúlya mellett határozzuk meg az elektronok illetve a pozitronok számát köbcentiméterenként! (Segítség: a pozitron kémiai potenciálja az elektronénak ellentettje. Az energia kifejezésében figyelembe veendő a nyugalmi energia is.)

PIKNONUKLEÁRIS EGYENSÚLY Ha a nukleáris egyensúly a szélsőségesen nagy sűrűségeken fellépő intenzív piknonukleáris reakciók miatt áll elő, az inverz β -bomlás fontos szerephez jut. Ilyenkor tehát csak a teljes barionszám tekinthető állandónak, a protonok és neutronok relatív számát magát is a fizikai paraméterek (elsősorban a sűrűség) határozzák meg.

A β - és inverz β -bomlások megszakta dinamikus egyensúly akkor tolódik el erősen a neutronok javára, amikor a nagy sűrűség mellett elfajult elektrongáz Fermi-nívója meghaladja az adott mag β -bomlása során felszabadítható energiát. Ilyenkor, mivel minden elektron-végállapot be van töltve, a β -bomlás reakciós rátája lecsökken, míg az inverz folyamat továbbra is akadálytalanul zajlik, s így az adott izotóp formájában levő nukleonok túlnyomó része neutronokká alakul. Ez a ρ_n *neutronizációs küszöb* minden izotópra más és más, akárcsak a piknonukleáris reakciók küszöbsűrűsége (ρ_{pyc}).

II. táblázat: Néhány izotóp ρ_n neutronizációs küszöbe és ρ_{pyc} piknonukleáris reakcióküszöbe

<i>Mag</i>	ρ_n [g/cm^3]	ρ_{pyc} [g/cm^3]
^1H	$1.2 \cdot 10^7$	10^6
^4He	$1.4 \cdot 10^{11}$	10^9
^{12}C	$3.9 \cdot 10^{10}$	10^{10}
^{56}Fe	$1.4 \cdot 10^9$	$> 10^{10}$

Az II. táblázatból látható, hogy könnyebb elemekre $\rho_n > \rho_{\text{pyc}}$, így mire neutronizálódhatnának, már elpusztultak a piknonukleáris reakciókban. Nehezebb elemeknél viszont a neutronizáció fontos szerephez jut. Következtében a Z/A arány a sűrűség növekedtével egyre csökken, s így $Q(Z, A)$ maximuma egyre magasabb tömegszámok felé tolódik (elsősorban a (2.2) formula Coulomb-tagja miatt). Így a sűrűség függvényében a leggyakoribb izotópok szekvenciája az ^{56}Fe -tól $8 \cdot 10^6 \text{ g/cm}^3$ fölött egyre nehezebb izotópokon át a ^{118}Kr -ig húzódik, míg végül $4.4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ sűrűség fölött megjelennek a szabad neutronok. (Ez a jelenség bizonyos szempontból analóg az α -részekre való széteséssel a termonukleáris reakciók esetében.) A neutrongáz nyomása $4 \cdot 10^{12} \text{ g/cm}^3$ -nél válik dominánssá az elektrongázéval szemben, tehát az állapotegyenlet szempontjából ettől kezdve beszélhetünk az anyag neutronállapotáról. Végül $2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ fölött az atommagok végképp eltűnnek.

Ez a szekvencia tükröződhet az elméleti modellek szerint a neutroncsillagok belső felépítésében is. A felszínhez közelebb, alacsonyabb nyomásnál és sűrűségnél még nehéz atommagok is jelen vannak a neutroncsillag anyagában, s a Coulomb-erők hatására ionrácsba rendeződnek, így a neutroncsillagnak szilárd kérgé van. A kérg alatt helyezkedik el a

már tisztán neutronokból (valamint a β -bomlások miatt aránylag kisszámú protonból és elektronból) álló, folyékony mag.

2.3 REAKCIÓS RÁTÁK

Mivel a nukleáris egyensúly kialakulásához szélsőséges hőmérséklet, illetve sűrűség szükséges, aránylag korlátozott azon esetek köre, ahol a magreakciók hatása ilyen módon számítható. Gyakrabban, elsősorban a csillagfejlődés során, éppen a fordított eset áll elő, vagyis a nukleáris égés időskálája jóval hosszabb az egyéb (pl. hidrodinamikai) folyamatokénál. Ilyenkor a minden más szempontból egyensúlyi rendszer fejlődésének éppen ez a mozgatórugója. A fejlődés leírásához tehát ilyenkor meg kell adnunk az adott időpillanatban érvényes izotópösszetételt, s kiszámítanunk, hogy az adott komponensek között lehetséges reakciók milyen ütemben zajlanak.

ALAGÚTEFFEKTUS Először is azt a körülményt kell figyelembe vennünk, hogy, kvantumfolyamatokról lévén szó, már a Coulomb-gát magasságánál kisebb relatív energiájú atommagok is véges valószínűséggel lépnek reakcióba. A kvantummechanikából tudjuk, hogy E energiájú beeső részecske a 9. ábrán látható potenciálgáton

$$P_t = P_0 e^{-2\pi\eta} \quad (2.9)$$

valószínűséggel jut át, ahol

$$\eta = \frac{m Z_1 Z_2 e^2}{2 \hbar E^{1/2}} \quad (2.10)$$

Itt m_i és Z_i az egyes magok tömege ill. rendszáma, m pedig a redukált tömeg:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.11)$$

A P_0 faktor függ a mag típusától, s tartalmaz egy gyenge, $E^{-1/2}$ jellegű energiafüggést is, ami az exponenciális tényező meredek energiafüggéséhez képest nem jelentékeny.

Kváziklasszikus közelítést használva (vagyis feltéve, hogy a hullámfüggvény csak saját hullámhosszánál sokkal nagyobb távolságokon változik meg érdemben, így lokálisan a szabad részecske esetéhez hasonlóan kezelhető), az alagutazási valószínűség (2.9) kifejezése a következőképpen áll elő. A levezetés során jó közelítéssel feltehetjük, hogy $r_1 \ll r_2$ (s így a gát nagy részében $r_1 \ll r$).

E energiájú és m tömegű beeső részecske hullámfüggvénye a kváziklasszikus esetben (a szabad részecske $\psi \propto e^{ipx/\hbar}$ hullámfüggvényét általánosítva) ($W(r)$ potenciális energiafüggvény mellett)

$$\psi = A \exp \frac{i}{\hbar} (Et + \underbrace{\int p}_{p} r)$$

ahol p az impulzus. (NB. Mint tudjuk, centrális erőterben való zéró impulzuszórájú mozgás egydimenziós mozgásként kezelhető.)

A beeső részecske valószínűségi áramsűrűsége:

$$j = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{d\psi^*}{dr} - \psi^* \frac{d\psi}{dr} \right) = \frac{1}{m} \left(p + r \frac{dp}{dr} \right) \psi^* \psi.$$

dp/dr $r < r_1$ -ben és $r \rightarrow \infty$ -ben zéró, így a gáton belüli és a gáton kívüli (állandó) valószínűségi áramsűrűség aránya (az alagutazási valószínűség) egyenlő a $\psi^*\psi$ valószínűségi amplitúdók arányával, szorozva az impulzusok arányával, $[(E - V_0)/E]^{1/2} \simeq (-V_0/E)^{1/2}$ -nel ($E \ll -V_0$). (Ez utóbbi faktor adja P_0 említett $E^{-1/2}$ -es energiafüggését.)

A gát egy infinitezimálisan vékony dr szeletén áthaladva a valószínűségi amplitúdó relatív változása (egy r_1/r rendű tagtól eltekintve)

$$\psi(r + dr)/\psi(r) = \psi^*(r + dr)/\psi^*(r) = \exp \frac{i}{\hbar} \sqrt{2m[E - W(r)]} dr \quad (2.12)$$

Így $E > W(r)$ esetén a kitevő tisztán képzetes, tehát az amplitúdóban nincs helyfüggés. $E < W(r)$ esetén viszont az exponenciális faktor amplitúdóváltozást is okoz. A teljes relatív változás r_1 és r_2 között a (2.12) kifejezések szorzataként áll elő, ami a kitevőkben szummázást, illetve — dr infinitezimális lévén — integrálást jelent. Tehát (2.12) négyzetének kitevőjét integrálva a $\psi^*\psi$ valószínűségi amplitúdók aránya a Coulomb-gát két oldalán e^{-G} , ahol a G *Gamow-faktor*:

$$G = \frac{2}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m[W(r) - E]} dr$$

Figyelembe véve, hogy $W(r) = Z_1 Z_2 e^2/r$ és $r_2 = Z_1 Z_2 e^2/E$,

$$G = \frac{2(2mE)^{1/2}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr$$

A határozott integrál értéke

$$r_2 [\arccos \sqrt{r_1/r_2} - \sqrt{r_1/r_2} \sqrt{1 - r_1/r_2}] \simeq r_2 \pi/2,$$

ha $r_1 \ll r_2$. Így végül $G = 2\pi\eta$, ahol η a fenti (2.10).

Mivel a rendszámok szorzata η -n keresztül az exponensben jelenik meg, negatív előjellel, az alagutazási valószínűség a nehezebb magok reakciói esetében sokkal kisebb. Az ilyen folyamatokhoz tehát sokkal nagyobb részecskeenergiák, azaz — termonukleáris reakció esetén — sokkal magasabb hőmérsékletek kellenek. Ez a fizikai háttere annak a ténynek, hogy a csillagok fejlődésük során jól elkülönülő égési fázisokon mennek keresztül, melynek során egyre nehezebb elemek fúziója kerül sorra.

Az alagúteffektusra vonatkozó fenti formula azonban nem érvényes az E részecskeenergia egyes diszkrét pozitív értékeinél. A 9. ábrán látható potenciálban ugyanis a Schrödinger-egyenletnek nem csak negatív, de a gátnál kisebb pozitív energiaértékek esetén is van olyan stacionárius (azaz a gát véges vastagsága miatt csak kvázistacionárius) megoldása, ahol a $|\psi^2|$ tartózkodási valószínűség a gáton belül nagyobb, mint kívülről. Az ilyen *metastabil kötött állapotoknak* megfelelő beeső részecskeenergiák esetén az alagutazási valószínűség értelemszerűen közel 1 (rezonáns reakciók). A rezonáns reakciók szerepe nem jelentéktelen, és figyelembe vételük jelenti a legnagyobb bizonytalansági tényezőt a nukleáris reakciós ráták meghatározásánál, mivel a csillagok belsejében releváns viszonyok mellett nem ismerjük kielégítően a rezonanciák pontos jellemzőit.

A REAKCIÓS RÁTÁK A j és k magok reakciós rátája — azaz a köztük idő- és térfogategységenként bekövetkező reakciók száma — az alábbi alakba írható.

$$r_{jk} = \frac{1}{1 + \delta_{jk}} n_j n_k \langle \sigma v \rangle \quad (2.13)$$

ahol

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \sigma(E) v f(E) dE \quad (2.14)$$

v a magok relatív sebessége, $f(v)$ a sebességeloszlás, n_j és n_k a számsűrűségük, $\sigma = \sigma(v)$ pedig a reakció hatáskeresztmetszete. A formula helyessége könnyen belátható, ha megfontoljuk, hogy egységnyi idő alatt az egységnyi térrészben levő n_j j típusú részecskével az n_k k típusú részecske közül azok hatnak kölcsön, melyek az egyes részecskék által súrolt σ alapterületű, v magasságú hengerekbe esnek. Az első, Dirac-deltát tartalmazó faktor pedig azt veszi figyelembe, hogy $j = k$ esetén (önreakció) a fenti gondolatmenettel minden reakciót kétszer is számolunk, így ekkor a rátát felezni kell.

Ha a felszabaduló energia Q , akkor, a számsűrűségek helyett a koncentrációkat bevezetve, az energiatermelési ráta

$$\epsilon_{jk} = r_{jk} Q / \rho = \frac{1}{1 + \delta_{jk}} \frac{Q}{m_j m_k} \rho c_j c_k \langle \sigma v \rangle \quad (2.15)$$

A hatáskeresztmetszet értéke várakozásunk szerint nem haladhatja meg az ütköző p impulzusú részecske $\lambda_0 = 2\pi h/p$ de Broglie-hullámhosszát, hiszen számottevő valószínűséggel csak ekkora térrészben tartózkodik. Mindazonáltal, ha a két mag λ_0 -on belül megközelíti egymást, még nem biztos, hogy reagálnak. Ehhez először is le kell győzniük a Coulomb-gátat is, majd a gáton belüli — rövid — tartózkodás során ténylegesen reakcióba kell lépniük. Így σ alakja

$$\sigma = P_t P_r \pi \lambda_0^2 \quad (2.16)$$

ahol P_t a már felírt (2.9) alagutazási valószínűség, P_r pedig a reakció bekövetkezési valószínűsége. $\lambda_0^2 \propto E^{-1}$, így P_t fenti alakját beírva

$$\sigma = S E^{-1} e^{-2\pi\eta} \quad (2.17)$$

ahol az S ún. *asztrfizikai hatáskeresztmetszet* tartalmazza P_r -et, P_0 -at, és az esetleges rezonanciakorrekciót.

REAKCIÓTÍPUSOK ÉS HATÁSKERESZTMETSZETEK P_r , s ezen keresztül S értéke a folyamat jellegétől függően szélsőséges értékek között változhat. A kölcsönhatás jellege szempontjából három eset különböztethető meg.

(a) Erős kölcsönhatás: $A + B \rightarrow C + D$

Ilyenkor a reakció, ha a két részecske a Coulomb-gáton átjutott, gyakorlatilag biztosan bekövetkezik: $P_r \sim 1$.

(b) Elektromágneses kölcsönhatás: $A + B \rightarrow C + \gamma$

A két mag $\sim r_0/v \sim 10^{-22}$ s ideig marad a Coulomb-gáton belül. A reakció bekövetkezéséhez foton emissziója szükséges, aminek τ karakterisztikus ideje egy egyszerű klasszikus gondolatmenet alapján becsülhető meg. A klasszikus elektrodinamika törvényei szerint

$$Q = \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{x}}^2 = \frac{e^2 r^2 \omega^4}{c^3} \quad (2.18)$$

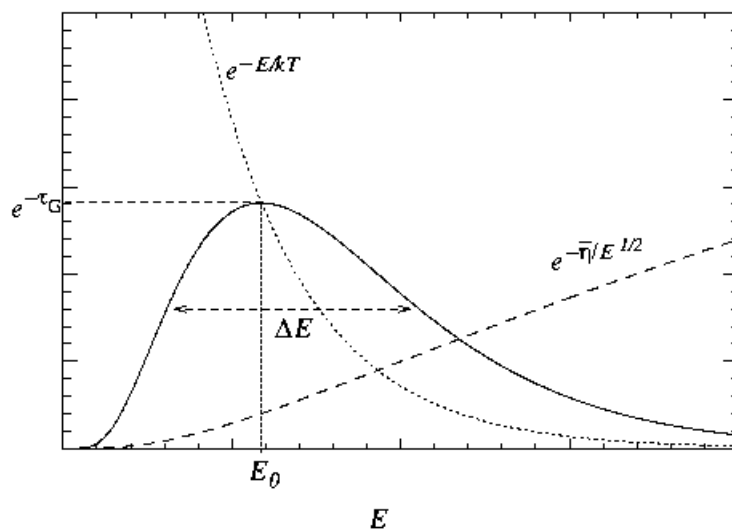
teljesítménnyel sugárzó oszcillátor $\tau = 2\pi\omega/Q$ idő alatt sugározza el egy foton $2\pi\omega$ energiáját. A kvantumos esetben tehát a kvantált emisszió, véletlenszerű időpontban, ennyi

időn belül zajlik le. A kötési energiák nagyságrendjének figyelembe vételével ez az időskála $\sim 10^{-16}$ s, sokkal hosszabb a Coulomb-gáton belüli tartózkodásénál. Tehát az emisszió valószínűsége r_0/v időn belül $P_r \sim r_0/v\tau \sim 10^{-6}$.

(c) **Gyenge kölcsönhatás:** $A + B \rightarrow C + e^+ + \bar{\nu}$

E kölcsönhatás karakterisztikus ideje a neutron élettartama, ami, mint tudjuk, ~ 10 perc. Így $P_r \sim 10^{-15}$.

A folyamatok vázolt valószínűségi viszonyai következtében egy reakciósorozat egészének ütemét annak leglassabb, legkisebb valószínűségű reakciója szabja meg.



11. ábra: A Gamow-csúcs. A (2.19) integrandusában szereplő tényezők (szaggatott és pontozott) energiafüggése, valamint szorzatuk (folytonos, más ordinátaskálán).

A GAMOW-CSÚCS Az eddigi megfontolások összegzéseként vizsgáljuk most meg a reakciós ill. energiatermelési ráták (2.13) és (2.15) kifejezéseiben fellépő $\langle \sigma v \rangle$ tényezőt. Termikus egyensúlyban levő közegben az energiaeloszlás az (1.69) Maxwell-féle energiaeloszlást követi: $f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} E^{1/2} T^{-3/2} e^{-E/k_B T}$. Ezt és (2.17)-t (2.14)-be beírva:

$$\langle \sigma v \rangle = (8/\pi m)^{1/2} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{k_B T} - \frac{\bar{\eta}}{E^{1/2}}\right) dE \quad (2.19)$$

ahol

$$\bar{\eta} = 2\pi\eta E^{1/2} = \pi\sqrt{2m} \frac{Z_j Z_k e^2}{\hbar} \quad (2.20)$$

A rezonáns reakciók esetét kivéve $S(E)$ gyenge energiafüggése miatt az integrandus alakját a benne szereplő exponenciális tényező határozza meg. Ez a 11. ábrán látható. A két ellentétes hatás (az alagúteffektus E -vel növekvő valószínűsége, ill. a gyors részecskék kisebb száma) eredőjeként kialakuló csúcsot *Gamow-csúcsnak* nevezik. A részletes számolás alapján paraméterei is levezethetők. A csúcs E_0 helyzete az integrandus deriváltját nullával egyenlővé téve kapható meg, ΔE szélessége pedig az integrandus E_0 körüli

sorfejtésével, a másodrendű tag együtthatójából származtatható:

$$E_0 = 5.665 \text{ keV} \cdot W^{1/3} T_7^{2/3} \quad (2.21)$$

$$\Delta E = 4.25 \text{ keV} \cdot W^{1/6} T_7^{5/6} \quad (2.22)$$

ahol $W = Z_j^2 Z_k^2 m/m_H$. A csúcs magassága $e^{-\tau_G}$, ahol

$$\tau_G = 3E_0/k_B T = 19.7(Z_j^2 Z_k^2 A/T_7)^{1/3}, \quad (2.23)$$

ahol $A = A_j A_k / (A_j + A_k)$ az effektív tömegszám, T_7 pedig a hőmérséklet 10^7 K egységben.

A görbe alatti terület durván a csúcs szélességének és magasságának szorzatát felelve becsülhető (s a pontos (2.19) integrálkifejezés is csak egy numerikus faktorban tér el ettől). Így végül:

$$\langle \sigma v \rangle \propto \tau^2 e^{-\tau} \propto T^{-2/3} \exp(-CT^{-1/3}) \quad (2.24)$$

ahol C konstans. A hőmérsékletfüggésben az exponenciális tényező dominál, így az igen meredek. Szűkebb hőmérséklet-intervallumokon belül szokás (2.24)-et hatványfüggvénnyel (azaz logaritmikus skálán egyenessel) közelíteni. Így a reakciós ill. energiatermelési rátákra

$$\epsilon \propto \rho^2 T^n \quad (2.25)$$

típusú kifejezések adódnak, ahol n értéke

$$n = \frac{\partial \log \langle \sigma v \rangle}{\partial \log T} = \frac{\tau - 2}{3}, \quad (2.26)$$

ami különböző reakciókra 3 és 30 között mozog. A (2.24) és (2.25) kifejezések pontos együtthatói tartalmazzák az $S(E)$ asztrofizikai hatáskeresztmetszetet, amely laboratóriumi mérések (nukleáris szórás kísérletek) eredményeit a csillagokban uralkodó viszonyokra extrapolálva határozható meg. (A rezonanciák azonban, mint említettük, az ilyen extrapolációban némi bizonytalanságot okoznak.)

2.4 ENERGIATERMELŐ FOLYAMATOK A CSILLAGOKBAN

HIDROGÉNÉGÉS Ha egy kozmikus összetételű gázt gondolatban lassan (kvázistacionáriusan) hevítünk, a gáz teljesen ionizálódik, majd az atommagok egyre nagyobb valószínűséggel győzik le az őket elválasztó Coulomb-gátat. Egy reakció “beindulásáról” a gyakorlatban akkor beszélhetünk, ha olyan gyakorivá válik, hogy képes (az Univerzum koránál rövidebb idő alatt) számottevően megváltoztatni az égítést vegyi összetételét, a reakcióba lépő izotópok gyakoriságát.

Először a jelenlevő deuteronok lépnek reakcióba, pár millió fokon:

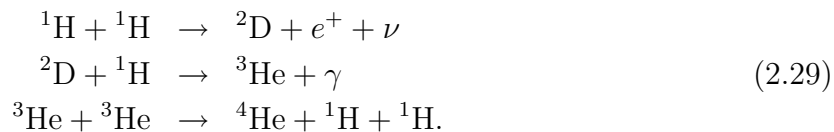


Ezt a folyamatot hívják **deutériumégésnek**. A ${}^2\text{D}$ azonban hamar elfogy.

10^7 kelvinen viszont már a protonok is legyőzik a köztük levő Coulomb-gátat:



így pótolva a (2.40) által fogyasztott deuteronokat. Kiepül tehát a *pp*-ciklus fő láncá:



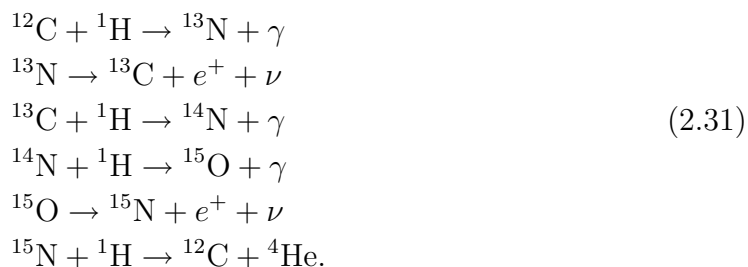
A proton–proton ciklus nemcsak a csillagok energiatermelésének messze leggyakoribb forrása (az összes csillag 90 %-a vörös törpe), de egyben klasszikus példát is jelent a magreakciók előző szakaszban megismert három fő típusára. Az első folyamat a gyenge kölcsönhatás prototípusa, míg a második elektromágneses, a harmadik pedig erős kölcsönhatást jelent. Ennek megfelelően a legkisebb valószínűséggel — tehát a leglassabb ütemben — az első, *p–p* reakció zajlik. Az egész reakciósorozat ütemét pedig leglassabb reakciójáé szabja meg. A ciklus teljes energiatermelése így az egy ciklusban felszabaduló, összesen 13.086 MeV energiát az ütemet megszabó *p–p* reakció rátájával megszorozva adódik. (2.26) szerint $T_0 = 1.5 \cdot 10^7$ K környékén a *p–p* reakcióra $n = 3.9$. Az együttható értékét beírva a teljes képlet:

$$\epsilon_{pp} \simeq 0.38 \text{ erg/g/s} \cdot \rho X^2 (T/T_0)^{3.9}.
 \tag{2.30}$$

A fenti egyébként csak a legnagyobb valószínűségű ütközési lánc, az ún. *főcsatorna*. A ciklusnak azonban több mellékága is van, melyeket majd a napfizika keretében tárgyalunk részletesen.

A felszabaduló neutrínók gyakorlatilag akadálytalanul hagyhatják el a csillagot. A neutrínók jelentős részének energiája elég nagy ahhoz, hogy jelenlegi detektorainkkal észlelni tudjuk őket. Az észlelések azt mutatták, hogy a tényleges neutrínófluxus lényegesen alacsonyabb az elméletileg várt értéknél. Ezen ún. *napneutrínó-probléma* csak 2001-ben oldódott meg, amikor bebizonyosodott, hogy az eltérést az elektron-neutrínók egy részének más, nehezebben észlelhető neutrínófajttá való átalakulása okozza.

A hidrogén-hélium fúzió a *pp*-ciklus mellett más módon is történhet, a plazmában jelenlevő szénatomok, mint katalizátorok segítségével. Ez a *CNO-ciklus*:

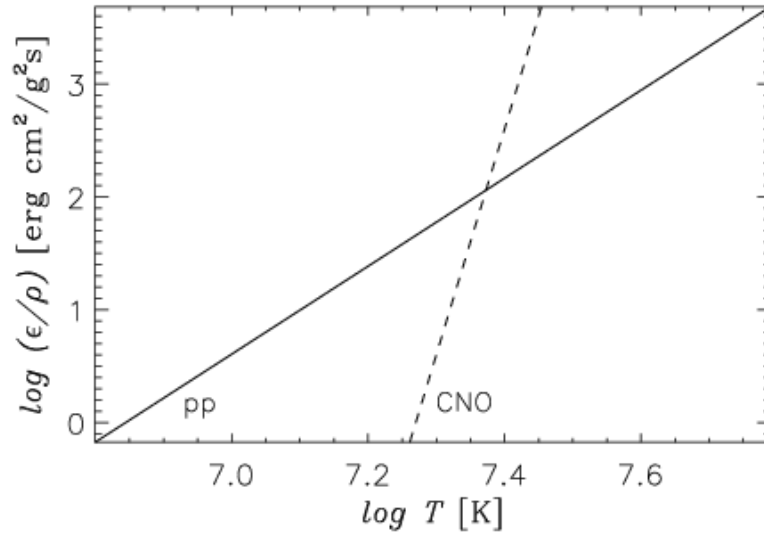


Melyik folyamat jelenti itt a szűk hatáskeresztmetszetet? Gyenge kölcsönhatást igénylő fúziók itt nincsenek (a gyenge kölcsönhatások itt mind bomlások, s így 1 valószínűségűek). Tehát az elektromágneses folyamatok egyike lesz a meghatározó. A pontos számítás szerint közülük a ${}^{14}\text{N}-{}^1\text{H}$ reakciós ráta a legkisebb. A fentivel analóg módon a ciklus energiatermelése a benne összesen felszabaduló 24.97 MeV energiát a ${}^{14}\text{N}-{}^1\text{H}$ reakciós rátával szorozva adódik ($T_0 = 1.5 \cdot 10^7$ K körül):

$$\epsilon_{\text{CNO}} \simeq 1.94 \text{ erg/g/s} \cdot \rho X X_{\text{CN}} (T/T_0)^{20},
 \tag{2.32}$$

ahol X_{CN} a szén és nitrogén együttes tömeghányada.

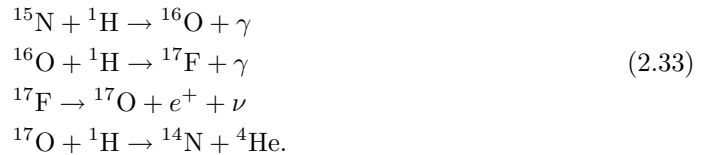
Mint a T -függésből látható (12. ábra), magas hőmérsékleten (felső fősorozat) a CNO-ciklus, alacsonyabb hőmérsékleten (alsó fősorozat) a *pp*-ciklus dominál. A Nap magjában



12. ábra: A pp - és a CNO -ciklus energiatermelésének hőmérsékletfüggése 15 millió K táján.

a hőmérséklet mindenütt kb. 15 millió K alatt marad, így ott a pp -ciklus mellett a CNO -ciklus alárendelt szerepet játszik.

A fenti reakciósorozat tulajdonképpen csak a “szén-nitrogén ciklus”, hiszen a ^{16}O nem szerepel benne. Ez az izotóp egy, a fenti ciklusból leágazó, jóval kisebb valószínűségű másodciklus során kapcsolódik be a körforgásba. (2.31) utolsó reakciója helyett ugyanis a ^{15}N kisebb valószínűséggel az alábbi módon is reagálhat:



A ^{14}N újra bekapcsolódhat a ciklusba a (2.31) főciklus 4. reakciójánál.

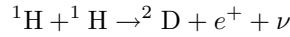
A szén katalizátori szerepe a kettős CNO -ciklusban nem tökéletes: mivel a leglassabb reakció a ^{14}N -é, a körforgásban résztvevő fémagok itt “feltorlódnak” (akárcsak a gépkocsi a legtávolabbi piros jelzőlámpánál a körúton). Így ha a folyamat megszakad (pl. mert elfogy a hidrogén), utána a szén nagy része nitrogénként marad vissza. A N nagy része éppen így keletkezik a csillagokban az adott csillagban már eleve jelenlevő másik nehézelemből, a szénből. (Ilyenkor az illető elemet, esetünkben a nitrogént, *szekundér elemnek* mondjuk, ellentétben a *primér elemekkel*, melyek H-ból történő, fúziós láncan keresztül előállítására egyetlen csillagon belül zajlik le.)

A CNO ciklus ily módon a szén, nitrogén és oxigén között jól meghatározott — a hőmérséklettől kissé függő — mennyiségi arányt hoz létre a gázban. $3 \cdot 10^7$ K-en ez a százalékos arány $^{12}\text{C}:^{14}\text{N}:^{16}\text{O} = 1.6 : 97 : 1.3$.* Egyes csillagok légkörében a három elem gyakorisága közel áll ezen egyensúlyi értékekhez, ami arra utal, hogy itt a csillag légkörében nukleárisan már kiégett anyagot látunk. Ez a helyzet pl. a Wolf–Rayet csillagok WN alcsoportjánál. A Wolf–Rayet csillagok olyan, igen nagy tömegű, előrehaladott fejlődési állapotú csillagok, amelyek hidrogéngazdag külső burkát a belőlük kiinduló erős csillagszél teljesen felemésztette, s kiégett belsejük a felszínre került. A C,

*A C, N és O általános kozmikus gyakoriságainak százalékos aránya ugyanakkor 28 : 8.3 : 64.

N és O relatív gyakoriságának vizsgálata ezért nagy jelentőségű mind a csillagfejlődési vizsgálatok, mind az Univerzum kémiai evolúciójának felderítése szempontjából.

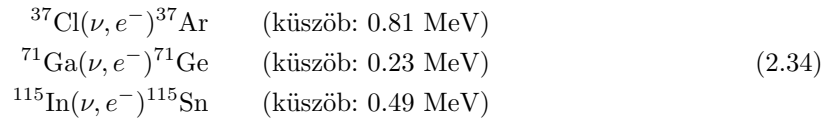
Feladat: Tekintsük a pp ciklus első reakcióját:



A proton tömege $m_H + 7.289 \text{ MeV}$, a deutroné $2m_H + 13.136 \text{ MeV}$, az elektroné 0.507 MeV .

(a) Mekkora energiája lehet a reakcióban keletkező neutrínónak?

(b) Az alábbi reakciók közül melyek alkalmasak e neutrínók detektálására?



(c) Mennyi a deutron kinetikus energiája, ha az elektron, illetve ha a neutrínó energiája maximális?

HÉLIUMÉGÉS A (2.29) és (2.31) reakciók nettó hatása a leptonok és fotonok mellőzésével összefoglalóan



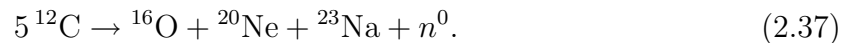
alakban írható fel. Ez folyamatonként kb. 26 MeV energiát ad. Ha a H kiégése után a hőmérséklet tovább nő, további magreakciók lépnek fel. Ezek közül adott hőmérsékleten az energiatermelés orozslánrészét rendszerint egy reakciócsatorna adja. Ezeket a csatornákat a továbbiakban nem tárgyaljuk a fentihez hasonló részletességgel, csak a főcsatorna nettó egyenletét adjuk meg.

10^8 K táján begyullad a hélium (**3α -folyamat**):



(Melléktermékként a ${}^{12}\text{C}$ -ből α -részecske befogásával már jelentős részben ${}^{16}\text{O}$ keletkezik, tehát ezután a gáz főleg szénből és oxigénből áll.) A hélium elfogytával $6 \cdot 10^8 \text{ K}$ körül a **szénégés, majd a neon-, oxigén- és szilíciumégés** következik. Végül az ${}^{56}\text{Fe}$ lesz a domináns elem, melynél az egy nukleonra eső kötési energia maximális, így jó közelítéssel beáll a **nukleáris egyensúly**.

TOVÁBBI REAKCIÓK A szénégés nettó főcsatornája



A mellékágakban igen jelentős mennyiségű ${}^{24}\text{Mg}$ keletkezik, így a szénégés végén az O, Ne és Mg dominál a kémiai összetételben. Ezután, 10^9 K felett a neon gyullad be (a ${}^{16}\text{O}$ mágikus mag, nehezen reagál). A neonégés:



Az oxigénégés ezután (esetleg ezzel egyidőben) következik:



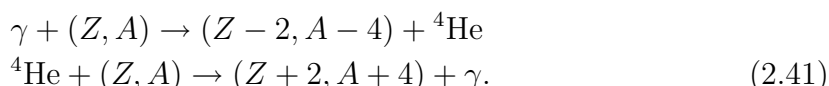
mellékágak bonyolult hálózatával. Végül $2.5 \cdot 10^9 \text{ K}$ felett a szilíciumégés zárja a fő energiatermelő reakciók sorát. A nettó főcsatorna:



2.5 A KÉMIAI ELEMÉK EREDETE

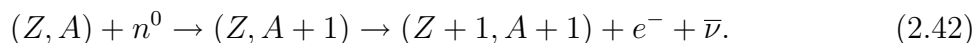
A fő energiatermelő reakciók mellett a csillagokban számtalan egyéb reakció is zajlik, amelyek az energiatermeléshez elhanyagolható járulékot adnak (vagy éppen energiafogyasztók), de a csillagok — és az Univerzum — kémiai összetételének alakításában igen fontos szerepük van.

α -FOLYAMATOK Egyik fontos ilyen reakciócsoport az **α -folyamatok** (más néven *photodezintegrációs átrendeződések*) csoportja:



Az α -részecske helyett szerepelhet proton vagy deuteron is. A (2.38) neonégés és a (2.40) szilíciumégés szintén α -folyamatok, de emellett gyakorlatilag minden $A \sim 20$ –50 páros rendszámú elem α -folyamatokban keletkezik az óriáscsillagok belsejében.

NEUTRONBEFOGÁS A páratlan rendszámú és a vason túli elemek jórészt neutronbefogással keletkeznek, melynek két változata van. Az **s -folyamat** (' s -folyamat—bb slow'):



Ettől az **r -folyamat** ('rapid') abban különbözik, hogy az első neutron befogásával létrejött radioaktív mag még bomlás előtt újra neutronot fog be, és a rendszám ugrásszerűen nő. Az s -folyamat óriáscsillagokban zajlik, az r -folyamathoz szükséges nagy neutronfluxus viszont csak szupernóvákban áll elő. (A neutronokat a fő energiatermelő reakciók, illetve bizonyos mellékágaik szolgáltatják.)

EGYÉB REAKCIÓK A vas csoport elemeinek keletkezésében a nukleáris egyensúly tájékán lezajló folyamatoknak (**e -folyamatok**) van fontos szerepe; végül a kevésbé jelentős **p -folyamat** néhány alacsony neutronszámú izotóp létrejöttét magyarázza.

A KÖNNYŰFÉMEK Végül megemlítjük, hogy a könnyűfémek (Li, Be, B) és a deutérium a csillagok belsejében nem keletkeznek, sőt mennyiségük csökken. Ezen elemek létrejötte a ma elfogadott elképzelés szerint részben csillaglégkörökben, részben pedig csillagközi molekulafelhőkben (ld. 3.1. szakasz) történik, úgy, hogy a kozmikus sugarak nehezebb magokat kisebb darabokra törnek (*spalláció*).

3. KOZMIKUS FLUIDUMOK

3.1 MAKROSZKOPIKUS ÉS MIKROSZKOPIKUS ÁRAMOK

A FLUIDUM FOGALMA Az eddigiekben térben homogén közegekkel foglalkoztunk, ahol az egyensúlytól való egyetlen eltérést az egyes összetevők közötti reakcióegyensúly hiánya jelentette. Most áttérünk a térben inhomogén közegek vizsgálatára; ugyanakkor egyszerűsítésképpen e fejezet fő részében összetételüket tekintve homogén közegekre korlátozzuk érdeklődésünket.

Legyen a közegben a makroszkopikus inhomogenitások jellemző léptéke l , a részecskék szabadúthossza (mikroszkopikus lépték) pedig l_* . Ha létezik olyan λ lépték, melyre $l_* \ll \lambda \ll l$, akkor a közeg ilyen méretű kis része (a továbbiakban: “fluidumelem”) már makroszkopikus, mégis jó közelítéssel homogén, egyensúlyi rendszernek tekinthető, így alkalmazható rá az egyensúlyi termodinamika már megismert formalizmusa. Az ilyen *összenyomható* vagy *ütközéses közegre* tehát lokálisan használhatók a termodinamikai relációk (pl. az állapotegyenlet). A fenti feltételt nem teljesítő *ütközésmentes közegeknek* viszont csak kinetikus fizikai leírása lehetséges. A továbbiakban ütközéses, összenyomható közegekkel foglalkozunk.

Az ütközésmentesség az igen ritka és/vagy igen forró közegek jellemzője, mivel a szabadúthossz a részecskék sebességével nő, a sűrűséggel pedig csökken. De ρ és T egymagukban még nem határozzák meg, ütközésmentes-e a közeg, hiszen a definícióban az l makroszkopikus lépték is szerepet játszik. A laboratóriumban előállítható legjobb vákuum esetében l szerepét a tartály mérete játssza, így a közeg természetesen ütközésmentes. A csillagközi anyag sűrűsége ennél nagyságrendekkel kisebb, az óriási léptékek miatt mégis összenyomható közegként fogható fel. A kozmikus sugárzást alkotó nagysebességű részecskék szabadúthossza viszont olyan nagy, hogy ismét csak nem fogható fel ütközéses gázként, ezért a kozmikus sugarakat nem szokás az intersztelláris közeg részének tekinteni.

Inhomogén közegben az extenzív mennyiségek a közeg részei között átadódhatnak (ami külső kényszertől mentes homogén közegben szimmetriaokokból nem lehetséges). Folytonos sűrűségeloszlású mennyiség esetében ez a transzfer az adott mennyiség *áramsűrűségével* jellemezhető. Ha az A extenzív mennyiség fajlagos (azaz tömegegységre vetített) értéke a , akkor sűrűsége nyilván ρa , ahol ρ a tömegsűrűség. Áramsűrűsége ekkor definíció szerint olyan $\mathbf{j}_A^{(T)}$ vektor, melynek \mathbf{n} irányú komponense

$$\mathbf{j}_A^{(T)} \cdot \mathbf{n} = \frac{dA}{d\sigma_n dt} \quad (3.1)$$

ahol dA A -nak az \mathbf{n} normálvektorú $d\sigma_n$ infinitezimális felületelemen dt infinitezimális idő alatt átadott mennyisége.

Más extenzív mennyiségekhez hasonlóan a tömegnek is lehet árama, vagyis a közeg részei egymáshoz képest — a *merev testek* idealizált esetével ellentétben — elmozdulhatnak. Az ilyen *deformálható közegeknek* két fő típusa van. A *rugalmas közegekben* a deformáció hatására az eredeti állapot visszaállítására törekvő erők ébrednek, míg a *képlékeny közegek* vagy *fluidumok* nem állnak ellen a deformációnak. A továbbiakban fluidumokkal foglalkozunk.

Fontos hangsúlyozni, hogy a *fluidum* kifejezés *nem* a halmazállapotra utal. Fluidumként viselkedik minden gáz, plazma és folyadék; de hosszantartó erőhatásokkal szemben még a kristályos szerkezetű szilárd testek is. Ez utóbbi jelenség magyarázata az, hogy minden kristályban található kristályhibák, diszlokációk, melyek a rácsban a hosszantartó erők hatására elmozdulva a tartós deformációt lehetővé teszik. Így pl. a kőzetbolygók szilárd halmazállapotú köpenyében is fellépnek igen lassú áramlások. A Föld esetében ezek az alsó és középső köpenyben — az *asztenoszférában* — zajló áramlások sodorják magukkal a felettük elhelyezkedő, a felső köpenyt és a földkérget magába foglaló, kevésbé képlékeny *litoszférát* alkotó lemezeket.

ÁRAMLÁS ÉS ÁRAMOK A \mathbf{v} *áramlási sebesség* definíció szerint a tömegáramsűrűség és a tömegsűrűség hányadosa:

$$\mathbf{v} = \mathbf{j}_m^{(T)} / \rho \quad (3.2)$$

Ezek után bármely extenzív mennyiség árama formálisan két részre bontható:

$$\mathbf{j}_A^{(T)} = \rho \mathbf{v} + \mathbf{j}_A \quad (3.3)$$

ahol \mathbf{j}_A -t éppen ez az összefüggés definiálja. (3.3) jobb oldalának első tagja az A áramának azon része, melyet a mozgó anyag szállít magával (idegen szóval *konvektál* vagy *advektál*). Az áram ezen részét *advektív áramnak* (*konvektív áram*, *szállítós áram*), vagy *makroszkopikus áramnak* nevezzük. Ezzel szemben \mathbf{j}_A az áramnak az anyag makroszkopikus mozgásától független része, a *konduktív áram* (*vezetési áram*), vagy *mikroszkopikus áram*. Ez az áram a szomszédos fluidumelemek egyes részecskéinek ütközése, illetve keveredése révén történő transzfert írja le.

\mathbf{v} definíciójából következőleg az össztömegnek természetesen nincs mikroszkopikus árama. A belső energiának viszont van, s ennek meghatározásához az eddig használt egyensúlyi termodinamikai leírás nemegyensúlyi rendszerekre való kiterjesztésére van szükség. A *nemegyensúlyi termodinamika* az egyensúlyihoz képest további alapfeltevésekre támaszkodik, s a belőle kapott transzportösszefüggések szabad paramétereit (transzportegyütthetők) tartalmazzák. Ez a leírás ezért nem teljes: az alapfeltevések (közelítő) teljesülésének igazolása és a transzportegyütthetők értékének meghatározása csak a kinetikai elmélet keretében lehetséges. Itt most mégis az egyszerűbb termodinamikai leírásnál maradunk, és a kinetikai megfontolásokat a minimumra korlátozzuk.

A nemegyensúlyi termodinamika fontos feltevése, hogy a transzportot (az áramokat) a rendszer adott időbeli állapota egyértelműen meghatározza, más szóval a rendszer *Marksov-féle* (nincs memóriája). A rendszer állapotát viszont az intenzív állapotjelzők térbeli eloszlása rögzíti (hiszen az állapotegyenlet különböző formái megadják az extenzív mennyiségeket ezek függvényében). Eszerint az áramsűrűség adott pontbeli értéke az intenzív állapotjelzők, mint helyfüggvények *funkcionálja*. Most az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az egyes extenzív állapotjelzők árama csak a hozzájuk tartozó intenzív mennyiségek eloszlásától függ, így az E belső energiáé a T hőmérsékleteloszlástól. Tudjuk, hogy a mikroszkopikus transzport a részecskék ütközésének ill. keveredésének eredménye, ezért azt várjuk, hogy az adott pontbeli energiaáram csak a pont kb. l_* sugarú környezetén belül érzékeny T eloszlására, hiszen ennél távolabbról csekély valószínűséggel érkehetnek részecskék. E kis környezetben, összenyomható közeg esetén, az eloszlást Taylor-sorfejtésének vezető tagjaival közelíthetjük:

$$T(\mathbf{r}) \simeq T(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \nabla T(\mathbf{r}_0) \quad (3.4)$$

vagyis az két paraméterrel (T és ∇T adott pontbeli értéke) leírható, így a funkcionál függvénné egyszerűsödik: $\mathbf{j}_E = f(T, \nabla T)$.

Mivel a fentebb mondottak szerint $\lambda \ll l$, a hőmérsékletváltozás a vizsgált λ méretű kölcsönható rendszerek (“szomszédos” fluidumelemek) léptékén kicsiny. A fenti \mathbf{j}_E függvényt ezért ∇T szerint hatványsorba fejtjük. A konstans tagnak el kell tűnnie, hiszen homogén közegben nincs transzport. Az elsőrendű tagot megtartva így a mikroszkopikus hőáram:

$$\boxed{\mathbf{j}_E = -\chi \nabla T = -c_P \rho \kappa \nabla T} \quad (3.5)$$

ahol χ a *hővezetési együttható*, κ pedig a *hődiffúzió*.

Mivel $E \sim \rho c_P T$, κ dimenziója hosszúság-sebesség. Az együtthatót a rendszer mikroszkopikus szerkezete határozza meg, gáz esetében az egyetlen mikroszkopikusan kitüntetett hosszúság- és időskála pedig a részecskék l_* szabadúthossza és v_* tipikus relatív sebessége. Tehát pusztán dimenzionális alapon:

$$\kappa \sim l_* v_* \quad (3.6)$$

Nemcsak az energia, de általános esetben más extenzív mennyiségek (pl. többkomponensű rendszerrel a komponensek részecskeszáma) mikroszkopikus áramsűrűsége is gyakran a (3.5) jobb oldalához hasonló típusú kifejezésekkel írható fel. Legáltalánosabb formában egy ilyen kifejezés egy, csak a közeg mikroszkopikus szerkezetétől függő *transzportegyüttható* és a makroszkopikus mennyiségek eloszlását és az esetleges külső kényszereket jellemző ún. termodinamikai *hajtóerő* szorzata. A fenti érvelés alapján kimondható, hogy **egy adott kölcsönhatás hajtóereje külső kényszerek hiányában mindig a megfelelő intenzív mennyiség gradiensének ellentettje**. Az ilyen transzportot *diffúzív transzportnak* is nevezik, az együttható (3.6)-hoz hasonló dimenzióra hozott alakja pedig a *diffúzió*.

Mivel, fenti feltevésünkkel ellentétben, általános esetben egy extenzív mennyiség áramára valamennyi intenzív állapotjelző eloszlása hatással lehet, így a transzportegyütthatók általában több intenzív mennyiség értékétől függenek; pl. $\kappa = \kappa(P, T)$. Ugyanígy, az általános esetben egy extenzív mennyiség árama nemcsak a neki megfelelő kölcsönhatás, de más kölcsönhatások hajtóerejével is arányos lehet (*keresztteffektusok*). A most tárgyalt homogén összetételű esetben ez azt jelenti, hogy a hőáram kifejezésében a hőmérséklet mellett elvben a nyomásgradienssel arányos tag is felléphetne. A második főtétel alapján kimutatható azonban, hogy e tag együtthatója szükségképpen nulla kell, hogy legyen (LL VI.49).

A hőtranszport mikroszkopikus mechanizmusát tekintve kétféleképpen történhet. A részecskék az energiát átadhatják egymásnak közvetlenül, ütközések útján: ez a szűkebb értelemben vett *hővezetés* vagy *kondukción*. A másik lehetőség az, hogy az energia *sugárzás* (tehát foton, vagy esetleg neutrínó ill. egyéb könnyű részecske) emissziója és abszorpciója révén adódik át a részecskék között (*radiáció*.) A hőterjedési együttható — és minden más transzportegyüttható — tehát egy konduktív és egy radiatív járulék összege:

$$\chi = \chi_c + \chi_r \quad (3.7)$$

A sugárzásos átvitel esetét a 6. fejezetben vizsgáljuk majd meg behatóbban.

Asztrofizikai plazmákban a radiatív hőtranszport gyakran fontosabb a konduktívénál. Ez a helyzet pl. a normális csillagok belsejében. A hővezetés elsősorban elfajult égitestekben, továbbá igen forró ($T \gtrsim 10^6$ K) plazmákban (pl. napkorona, szupernóva-buborékok) játszik szerepet.

AZ OHM-TÖRVÉNY ÁRAMLÓ FLUIDUMBAN Az elektromos töltés, mint extenzív mennyiség árama az elektromos áram, melyet egyszerűen \mathbf{j} -vel jelölünk. A fentiek alapján ez nyugvó vezető fluidumban

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.8)$$

alakba írható (*Ohm törvénye*), ahol σ a *vezetőképesség*. Az \mathbf{E} hajtóerőről kinetikai megfontolások alapján könnyen belátható, hogy az az egységnyi töltésre ható átlagos erő, vagyis az elektromos térerősség.

Valóban: ha az e_i töltésű, m_i tömegű, n_i számsűrűségű i -edik típusú részecske (ion vagy elektron) két ütközés közt várható szabad repülési ideje τ_i , akkor ezalatt $\mathbf{w}_i = \tau_i e_i n_i \mathbf{E} / m_i$ sebességre gyorsul. Az elektromos áramhoz így ezek a részecskék $\mathbf{j}_i = e_i n_i \mathbf{w}_i = \sigma_i \mathbf{E}$ járulékot adnak, ahol $\sigma_i = \tau_i e_i^2 n_i / m_i$ a közeg mikroszkopikus jellemzőitől függő transzportegyüttható. A részecsketípusokra szummázva adódik (3.8).

A töltésekre ható erőnek véletlenszerű komponense is van ugyan (a hőmozgásból adódó $\mathbf{v}'_i \times \mathbf{B}$ véletlen Lorentz-erő), de ez szisztematikus irányú részecskeáramlást nyilván nem okoz, s így az elektromos áramhoz sem járul hozzá.

Ha a fluidum áramlik, a benne levő szabad töltésekre ható átlagos erőhöz a Lorentz-erő is hozzájárul, hiszen átlagsebességük nem nulla. Az Ohm-törvény áramló fluidumban érvényes általános alakja tehát

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.9)$$

Az Ohm-törvény (3.9) általános alakjára más megfontolással is eljuthatunk. Ha a Maxwell-egyenleteket Lorentz-transzformációnak vetjük alá, egyenesen adódik, hogy az egyenletek Lorentz-kovarianciája (vagyis a vákuumbeli fénysebesség univerzális konstans volta, amit a kísérletek mutatnak) csak \mathbf{j} ilyen kifejezése mellett biztosított. (Ld. MFKE...)

ÁRAMOK TÖBBKOMPONENSŰ FLUIDUMOKBAN Több összetevő esetén a fentiek analógiájára az egyes komponensek mikroszkopikus áramának hajtóereje a megfelelő kémiai potenciál gradiensének ellentettje. Az entrópiamérleg alapján azonban kimutatható (ld. pl. Harmatha 14.3), hogy a fluidumra ható külső erők esetén a hajtóerő kifejezésében megjelenik a $\hat{\mu}_i m_i \mathbf{f}_i / k_B T$ tag is, ahol \mathbf{f}_i az m_i részecsketömegű, $\hat{\mu}_i$ kémiai potenciálú i -edik komponensre ható, a külső erőtér okozta gyorsulás. Így pl. nehézségi erő esetén $\mathbf{f}_i = \mathbf{g} = -\nabla U$ minden komponensre, ahol \mathbf{g} a nehézségi gyorsulás vektora és U a gravitációs potenciál. A hajtóerő tehát

$$-\nabla \hat{\mu}_i + \hat{\mu}_i \mathbf{m}_i \mathbf{f}_i / k_B T$$

A gyakorlatban $\hat{\mu}_i$ -t ki szokás fejezni a T hőmérséklet, továbbá az egyes összetevők n_i számsűrűsége (ill. alternatív c_i tömeghányaduk vagy koncentrációjuk, valamint a P nyomás) függvényében, így a hajtóerő kifejezésében ezek gradiensével arányos tagok jelennek meg a fenti első tag helyett. A kompozíciós és hőtranszport közötti keresztteffektus még első közelítésben sem elhanyagolható, így a ∇T -vel arányos taghoz ez is hozzájárul. A kinetikus elméletben kimutatható, hogy első közelítésben az egyes tagok együtthatói között egyszerű összefüggés van. Így végeredményben a diffúziós tömegáramsűrűség közelítő kifejezése (Battaner 1.4.1):

$$\mathbf{j}_i = -\rho_i D_i \left(\frac{\nabla(n_i T)}{n_i T} - \frac{m_i \mathbf{f}_i}{k_B T} \right) \quad (3.10)$$

A diffúziós együttható a (3.6)-tal analóg megfontolás alapján

$$D_i \sim l_{*,i} v_{*,i} \quad (3.11)$$

Külső erő hiányában, állandó hőmérséklet esetén (3.10)-ből

$$\mathbf{j}_l = -m_l D_l \nabla n_l = -\rho D_l \nabla c_l - m_l D_l \frac{n_l}{n} \nabla n \quad (3.12)$$

ahol $c_l = m_l n_l / \rho$ az adott komponens koncentrációja (tömeghányada). Nyomokban jelenlevő ($n_l \ll n$) összetevő (vagy $n = \text{const.}$) esetén a jobb oldal utolsó tagja elhagyható. Így (3.10) ebben az esetben *Fick első törvényére* redukálódik:

$$\mathbf{j}_l = -\rho D_l \nabla c_l \quad (3.13)$$

A kompozíciós diffúzió a hőáramot is módosítja, melynek általánosabb kifejezése (LL VI.58):

$$\mathbf{j}_E = C_{iE} \mathbf{j}_l - c_P \rho \kappa \nabla T$$

A FESZÜLTSGTENZOR Természetesen nemcsak a termodinamikában szerepet játszó extenzív mennyiségek, de bármely más extenzív mennyiség áramáról is van értelme beszélni egy fluidumban, így az impulzuséről is. Mivel az impulzus vektormennyiség, árama másodrendű tenzor, melynek ij komponense az i irányú impulzus j irányú áramsűrűségét adja meg. A (3.3) kifejezés mintájára ez a komponens

$$\rho v_i v_j - \hat{T} \quad (3.14)$$

alakba írható. Az impulzus-áramsűrűség advektív (makroszkopikus) része tehát vektorjelöléssel $\rho \mathbf{v} \circ \mathbf{v}$ (\circ a diadikus szorzat jele).

A mikroszkopikus impulzus-áramsűrűség ellentettjét konvencionálisan feszültségnek nevezzük. A \hat{T} feszültségtenzor két részre bontható:

$$\hat{T} = -P \hat{\delta} + \hat{\tau} \quad (3.15)$$

ahol a jobb oldal első tagja a feszültségtenzor nyugvó folyadékban ($\mathbf{v} \equiv 0$) érvényes alakja ($\hat{\delta}$ az egységtenzor). Felírásánál felhasználtuk, hogy ez a tenzor szükségképpen minden koordinátarendszerben izotrop. Ellenkező esetben ugyanis egy tömegelem j irányú szomszédjától i irányú impulzust kapna, ami szimmetriaokokból lehetetlen, hiszen a részecskék sebességeloszlása mindkét elemben zéró átlagú. Figyelembe véve, hogy a feszültséget az impulzusáram ellentettjeként definiáltuk, P az egységnyi felületen időegység alatt átadott impulzus, vagyis az egységnyi felületre ható erő, amit nyomásnak nevezünk. Világos, hogy ez a mennyiség megegyezik a korábban bevezetett, ugyancsak P -vel jelölt termodinamikai nyomással, hiszen dA felületelemet ds úton elmozdítva, az "innenső" fluidumelem térfogata $dV = ds dA$ -val nő, míg energiája a végzett munkával csökken: $dE = -P dA ds = -P dV$.

(3.15) jobb oldalának második tagja, a *viszkózus feszültségtenzor*, a fluidum belső áramlásai miatt a fluidumelemek között fellépő impulzusátadást reprezentálja. A fenti transzportösszefüggésekhez hasonlóan itt is feltesszük, hogy értékét a rendszer adott időbeli állapota teljesen meghatározza, vagyis $\hat{\tau}$ a sebességeloszlás funkcionálja.* A hőtranszportnál ismertetett gondolatmenetet tovább követve, $\lambda \ll l$ miatt a funkcionál linearizálható, a sebességeloszlás pedig $l_* \ll \lambda$ miatt leírható Taylor-sorfejtésének lineáris tagjával: $\tau_{ij} = C_{ijkl} \partial_i v_j$.† A $\nabla \circ \mathbf{v}$ tenzort szimmetrikus és antiszimmetrikus részek $\hat{D} + \hat{A}$ összegére bonthatjuk:

$$D_{ij} = (\partial_i v_j + \partial_j v_i)/2 \quad A_{ij} = (\partial_i v_j - \partial_j v_i)/2 \quad (3.16)$$

*Az ilyen fluidumok a *newtoni fluidumok*; az asztrofizikában túlnyomórészt ilyenekkel van dolgonk.

†E jegyzetben az alábbi rövid jelöléseket használjuk: $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}_i} = \partial_i \mathbf{y}$; $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \partial_t \mathbf{y}$; $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = d_t \mathbf{y}$.

\hat{A} komponensei $\nabla \times \mathbf{v}$ komponenseivel arányosak, tehát merev rotáció esetén nem tűnnek el, noha a szomszédos fluidumelemek között ilyenkor nincs relatív mozgás, s így impulzusátadás sem lehet. Ezért $\hat{\tau}$ kifejezése

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} D_{ij}$$

hiszen a $C_{ijkl} A_{ij}$ tagnak a fentiek szerint el kell tűnnie. \hat{D} elnevezése: *nyírási tenzor* (mivel hatására a fluidumelemeknek egy — pl. festékekkel megjelölt — téglatest alakú együttese paralelepipedonná nyíródik).

A C_{ijkl} komponensekből összeálló negyedrendű tenzor csak a közeg (skaláris) lokális termodinamikai jellemzőinek a függvénye, tehát izotrop. A tenzorkalkulusból ismeretes, hogy izotrop negyedrendű tenzor általános alakja

$$a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} \quad (3.17)$$

ahol a, b, c skalárok. (Ld. pl. ...) C_{ijkl} helyébe ezt beírva, és figyelembe véve, hogy $D_{kl} = D_{lk}$, a független skaláregyütthatók száma kettőre redukálódik:

$$\tau_{ij} = a\delta_{ij}D_{kk} + (b+c)D_{ij}$$

Bevezetve a $\mu = (b+c)/2$ és $\mu_\theta = a + (b+c)/3$ jelöléseket, és figyelembe véve, hogy $D_{kk} = \nabla \mathbf{v}$:

$$\tau_{ij} = 2\mu(D_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\partial_k v_k) + \mu_\theta\delta_{ij}\partial_k v_k \quad (3.18)$$

vagy vektorjelöléssel:

$$\hat{\tau} = 2\mu[\hat{D} - \frac{2}{3}\hat{\delta}\nabla\mathbf{v}] + \mu_\theta\hat{\delta}\nabla\mathbf{v} \quad (3.19)$$

A két független paramétert azért éppen ezen a módon definiáltuk, mert így (3.19) jobb oldalán az első tag zérus nyomú, vagyis így a viszkózus feszültségtenzort egy nulla nyomú és egy izotrop részre hasítottuk.

μ és μ_θ a (dinamikai) *viszkozitási együtthatók*. μ a *nyírási viszkozitás* vagy *nyíróviszkozitás*; μ_θ a *torlódási viszkozitás* vagy *torlóviszkozitás*.[‡] $\nabla \mathbf{v} = 0$ (vagyis inkompresszibilis áramlás vö. (3.39) alább) esetén a (3.19) kifejezés jobb oldalán a második tag eltűnik, ami lényeges egyszerűsítést jelent. $\nabla \mathbf{v}$ nagy értékeinél (pl. lökéshullámokban) viszont a torlódásnak fontos szerepe van.

A dinamikai viszkozitások helyett a gyakorlatban gyakrabban használjuk a velük

$$\mu = \rho\nu \quad \mu_\theta = \rho\nu_\theta$$

kapcsolatban álló ν, ν_θ *kinematikai viszkozitásokat*. Ezek dimenziója a korábban megismert transzportegyütthatókhoz hasonlóan sebesség·hosszúság, így nagyságukra vonatkozóan megint csak a (3.6) becslés alkalmazható, legalábbis a részecskék közvetlen ütközéséből adódó *molekuláris* viszkozitás esetében. Az impulzusátadást is közvetítheti ugyanakkor sugárzás is; az ezzel kapcsolatos *radiatív viszkozitást* a 6. fejezetben tárgyaljuk majd.

IDEÁLIS FLUIDUM — **Az olyan hipotetikus közeget, melyben valamennyi transzportegyüttható — azaz minden mikroszkopikus áram — nulla, ideális fluidumnak**

[‡]Egyéb nevei: térfogati viszkozitás, második viszkozitás

nevezzük. Az ilyen fluidumra tehát $\nu = \kappa = D_i = 0$. Elemei az extenzív állapotjelzők közül hőt és anyagot így nem cserélhetnek a szomszédos elemekkel; térfogatot viszont igen (azaz sűrűségük változhat), hiszen az \mathbf{v} fenti definíciójánál fogva nem mikroszkopikus, hanem makroszkopikus áramot jelent. A fluidumelem — a zéró viszkozitás ellenére — impulzust és kinetikus energiát is válthat szomszédaival, a nyomóerő és annak munkavégzése révén.

3.2 ALAPEGYENLETEK

ESZKÖZTÁR A sebesség (3.2) definíciója szerint egy fluidumelem dt idő alatti elmozdulása $d\mathbf{x} = \mathbf{v} dt$. Az elmozdulásokat összeintegrálva tehát a $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sebességmező ismeretében megkaphatjuk egy, a $t = 0$ időpontban az \mathbf{X} helyvektorú pontban levő fluidumelem \mathbf{x} helyzetét a t időpontban:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \int_0^t \mathbf{v}[\mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau), \tau] d\tau \quad (3.20)$$

Ez — implicit alakban — kölcsönösen egyértelmű összefüggést ad meg \mathbf{x} és \mathbf{X} között. Ennek megfelelően a fluidum leírása során független változónak nemcsak az \mathbf{x}, t rögzített — a tér pontjait azonosító — hely- és időkoordinátákat* tekinthetjük (*Euler-reprezentáció*), hanem, ha a célszerűség úgy kívánja, a fluidummal együtt mozgó, a fluidumelemeket azonosító \mathbf{X}, t koordinátákat is (*Lagrange-reprezentáció*).

A helykoordináták megváltoztatása az explicit időfüggés alakját is befolyásolja, így a kétféle reprezentációban a parciális időderivált értéke eltérő. Mivel a továbbiakban általában Euler-reprezentációt használunk, a parciális időderiválás hagyományos jelével az Euler-deriváltra utalunk:

$$\partial_t a \equiv \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \quad (3.21)$$

Ez tehát a tér egy rögzített pontjában méri az a mennyiség változási ütemét, ezért *lokális deriválnak* is nevezik. Ezzel szemben a Lagrange-derivált az Euler-reprezentáció szempontjából tkp. az $a[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t]$ közvetett függvény teljes időderiváltja:

$$D_t a \equiv \frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \quad (3.22)$$

Ez a derivált viszont a mozgó fluidumelem által “érezelt” változási üteme a -nak, ezért szokásos elnevezése *szubsztanciális derivált*. Minthogy

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \mathbf{v}, \quad (3.23)$$

a közvetett deriválás szabályát alkalmazva a kétféle időderivált összefüggése:

$$\boxed{D_t a = \partial_t a + \mathbf{v} \nabla a} \quad (3.24)$$

*Itt mindvégig nemrelativisztikus mozgásokat tekintünk, így az idő a nyugvó és mozgó rendszerben azonos.

vagy komponensekben[†]:

$$D_t a = \partial_t a + v_i \partial_i a \quad (3.25)$$

Ha most a egy A extenzív mennyiség fajlagos értékét jelöli, akkor e mennyiség változási üteme egy véges, rögzített V térfogatban nyilván $\partial_t \int \rho a dV$. E változáshoz hozzájárulhat az adott mennyiség térfogaton belüli keletkezése/elnyelődése, továbbá a térrész határoló felületén történő átáramlása:

$$\partial_t \int \rho a dV = \int Q_A dV - \oint \mathbf{j}_A^{(T)} d\mathbf{A}. \quad (3.26)$$

ahol Q_A az A forrássűrűsége, $d\mathbf{A}$ pedig a felületelem (kifelé mutató) normálvektora. Ez a mérlegegyenletek integrálalakja. Az utolsó tag a Gauss-tétel segítségével $\int \nabla \cdot \mathbf{j}_A^{(T)} dV$ alakra hozható, az első tagban pedig az időderiválás az integrál alá bevihető (hiszen független változók szerinti műveletek felcserélhetők). Mivel az integrál bármely V térfogatra teljesül, az integrandusra is teljesülnie kell, amivel (3.26) differenciális alakjára jutunk:

$$\partial_t(\rho a) = Q_A - \nabla \cdot \mathbf{j}_A^{(T)}. \quad (3.27)$$

A $\mathbf{j}_A^{(T)}$ áramsűrűséget (3.3) szerint felbontva, és az advektív áramot a baloldalra átvive kapjuk végül a mérlegegyenletek általános standard alakját:

$$\partial_t(\rho a) + \underbrace{\nabla(\rho a \mathbf{v})}_{\text{advektív tag}} = \underbrace{Q_A}_{\text{forrástag(ok)}} - \underbrace{\nabla(\mathbf{j}_A)}_{\text{diffúzív tag}} \quad (3.28)$$

A bal oldalt még az alábbi alternatív formákban is felírhatjuk:

$$\left. \begin{array}{l} \text{vagy: } \partial_t(\rho a) + \nabla(\rho a \mathbf{v}) \\ \text{vagy: } D_t(\rho a) + \rho a \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \text{vagy: } \rho D_t a \end{array} \right\} = Q_A - \nabla \cdot \mathbf{j}_A \quad (3.29)$$

A három alternatív alak közül a második az elsőből (3.24) alapján következik, a harmadik pedig (3.30) felhasználásával lesz megkapható.

KONTINUITÁSI EGYENLET A konkrét esetek közül elsőként tekintsük a tömeg mérlegegyenletét. Az a változó helyébe most a "fajlagos tömeg", vagyis 1 írandó; az össztömegnek pedig sem forrása, sem konduktív árama nincsen. Így (3.28) alapján a tömegmérleg, vagy más néven *kontinuitási egyenlet*

$$\boxed{\partial_t \rho + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0} \quad (3.30)$$

Ennek alternatív alakja (3.29) szerint

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.31)$$

illetve komponensjelöléssel:

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v_i) = D_t \rho + \rho \partial_i v_i = 0 \quad (3.32)$$

[†]Ebben a fejezetben mindenütt a szummázási konvenciót alkalmazzuk, vagyis egy kifejezés egyazon tagjában több tényezőben is előforduló latin betűs indexekre összegezni kell. (A görög indexekre viszont nem!)

Bontsuk fel (3.30) második tagját parciális deriválással, és becsüljük meg az egyes tagok nagyságrendjét:

$$\underbrace{\partial_t \rho}_{\rho/\tau_\rho} + \underbrace{\mathbf{v} \nabla \rho}_{\rho v/H_\rho} + \underbrace{\rho \nabla \mathbf{v}}_{\rho v/l} = 0 \quad (3.33)$$

Itt

$$H_a = |a|/|\nabla a| \quad \text{az } a \text{ mennyiség skálahossza} \quad (3.34)$$

$$l = \text{Min} \{|v_i|/|\nabla v_i|\}_{i=1..3} \quad \text{az áramlás jellemző léptéke} \quad (3.35)$$

$$\tau_a = |a|/|\partial_t a| \quad \text{a eloszlásának jellemző fejlődési ideje} \quad (3.36)$$

$$\tau = \text{Min} \{|v_i|/|\partial_t v_i|\}_{i=1..3} \quad \text{az áramlás jellemző fejlődési ideje} \quad (3.37)$$

a becslésnél pedig az egyes mennyiségek r.m.s. értéke (*root mean square*, azaz a négyzet-átlag gyöke, $\langle a^2 \rangle^{1/2}$) értendő.

Látható, hogy ha $\tau_\rho \gg l/v$, az első tag elhanyagolható, így a kontinuitási egyenlet az alábbi közelítő alakba írható:

$$\nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.38)$$

Ez az *anelasztikus közelítés*. Azért nevezik így, mert a fluidum sűrűsége pontonként állandó, nem lehetnek benne rugalmas fluktuációk. Ebből eredően ez a közelítés kizárja a hanghullámokat.

Ha ezen túlmenően $H_\rho \ll l$, akkor a második tag is elhanyagolható a harmadik tag egyes komponensei ($\rho \partial_x v_x$ stb.) mellett, így az egyenlet tovább egyszerűsödik:

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (3.39)$$

Ez az *inkompresszibilis közelítés*, az összenyomhatatlan fluidum esete (folyadékok, szilárd testek).

Az asztrofizikában leggyakrabban gáznemű égitestekkel van dolgunk. Ilyenkor a sűrűség és a sebesség általában hasonló léptékeken változik, az inkompresszibilitás feltevése tehát nem jogos. Ugyanakkor, mint a következő fejezetben látni fogjuk, a fluidumban a nyomásperturbációk a c_s hangsebességgel terjednek, s így $\tau_\rho \sim l/c_s$ időskálán visszaállítják a termodinamikai változók (így a sűrűség) egyensúlyi értékét. Így (3.33) bal oldalán az első és utolsó tag aránya az

$$M = v/c_s \quad (3.40)$$

Mach-szám lesz. Tehát az anelasztikus közelítés jól használható az áramlás leírására minden olyan esetben, ahol a gáz áramlási sebessége a c_s hangsebességhez képest kicsiny.

Többkomponensű fluidumokban, pl. a csillagok anyagában, a tömegmérleg nemcsak az össz-tömegre, de az egyes összetevőkre külön-külön is felírható. Ilyenkor természetesen már forrás és diffúzív áram is felléphet. A c_i koncentrációjú i -edik komponens mérlege tehát:

$$\partial_t \rho c_i + \nabla(\rho c_i \mathbf{v}) = Q_i - \nabla \mathbf{j}_i \quad (3.41)$$

Itt a Q_i forrás (2.13) alapján számítható, a diffúzív áram kifejezése pedig (3.12), ahol az \mathbf{f}_i külső erőhöz a sugárnyomás is hozzájárulhat.

A vegyi diffúzió következtében a csillagok fejlődése során a nehezebb elemek lassan ülepednek a burokból a mag felé. Precízebb csillagfejlődési számításoknál ezt az ülepedést is figyelembe kell venni, elsősorban a hélium esetében. Az ülepedés következtében pl. a Nap fotoszférájában a He gyakorisága csupán 24.6%, noha a Nap teljes anyagát tekintve ez az érték 27.5%.

A sugárnyomás hatása a diffúzióra elsősorban a csillaglégkörben jelentős, fényes, forró csillagok esetében. Ha a csillag légkörében nincs számottevő turbulens keveredés, a diffúziós egyensúly kialakulása miatt a fotoszféra vegyi összetétele erősen eltérhet a csillagra általánosan jellemző összetételtől. A legtöbb csillag esetében ezt a jelenséget megakadályozza a — konvektív vagy rotációs instabilitásokból eredő — turbulencia. Így a mikroszkopikus diffúzió okozta kémiai anomáliák csak akkor figyelhetők meg, ha a turbulenciát gátolja az erős gravitációs rétegződés (fehér törpék) vagy az erős mágneses tér (Ap csillagok), illetve ha a lassú forgás és a burok konvektív stabilitása miatt hiányzik a turbulenciát keltő mechanizmus (Am csillagok).

MOZGÁSEGYENLET Írjuk fel most az impulzus mérlegegyenletét. Mivel az impulzussűrűség $\rho\mathbf{v}$, a “fajlagos impulzus” egyszerűen a \mathbf{v} sebesség, tehát e vektormennyiség komponensei írandók (3.28)-ben a helyébe. Figyelembe véve, hogy az impulzus forrása Newton II. törvénye értelmében a fluidumra kívülről ható erő, mikroszkopikus árama pedig a 3.1. szakaszban tárgyalt feszültségtenzor ellentettje, a kapott egyenlet komponensekben:

$$\left. \begin{array}{l} \rho D_t v_i \\ \partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j) \\ \rho \partial_t v_i + \rho v_j \partial_j v_i \end{array} \right\} = \rho f_i - \partial_i P + \partial_j \tau_{ij} \quad (3.42)$$

ill. vektorjelöléssel:

$$\left. \begin{array}{l} \rho D_t \mathbf{v} \\ \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \nabla(\rho \mathbf{v} \circ \mathbf{v}) \\ \rho \partial_t \mathbf{v} + \underbrace{\rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}}_{\text{inerciális tag}} \end{array} \right\} = \underbrace{\rho \mathbf{f}}_{\text{külső vagy térfogati erők}} - \underbrace{\nabla P + \nabla \hat{\tau}}_{\text{belső vagy felületi erők}} \quad (3.43)$$

ahol $\hat{\tau}$ kifejezését már ismerjük (3.19). (Speciálisan állandó viszkozitású, összenyomhatatlan folyadék esetén (3.43) utolsó tagja a különösen egyszerű $\rho\nu\nabla^2\mathbf{v}$ alakot ölti.) A feszültségtenzorral kapcsolatos tagokat azért neveztük “belső vagy felületi erőknek”, mert (3.43)-at (3.26) mintájára integrálalakra hozva ezek a mozgó fluidumelem felületére a szomszéd fluidumelemek részéről ható erőt adják. A “külső erők” pedig csak a vizsgált fluidumelem szempontjából külsők, eredhetnek a fluidum más, távoli részeivel való (gravitációs, elektromágneses,...) kölcsönhatásból is; ezért szerencsésebb őket a felületi erőktől való megkülönböztetésül térfogati erőknek nevezni. Eszerint tehát (3.43) a mozgó fluidumelem gyorsulása és a rá ható erők közötti kapcsolat kifejezése, a mechanikai mozgásegyenlet.[‡]

A kontinuitási egyenlethez hasonlóan itt is megbecsülhetjük az egyes tagok nagyságát:

$$\underbrace{\rho \partial_t \mathbf{v}}_{\rho v/\tau} + \underbrace{\rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}}_{\rho v^2/l} = \rho \mathbf{f} - \underbrace{\nabla P}_{P/H_P} + \underbrace{\nabla \hat{\tau}}_{\rho \nu v/l^2} \quad (3.44)$$

Az egyenletekben az egyes tagok jellemző nagyságrendjeinek aránya az áramlást jellemző dimenziótlan számokat definiál. Egyikükkel, a Mach-számmal már a kontinuitási egyenlet kapcsán találkoztunk. A mozgásegyenlet vonatkozásában a legfontosabb ilyen szám az inerciális ill. a viszkózus tag relatív jelentőségét jellemző *Reynolds-szám*:

$$\text{Re} = lv/\nu \quad (3.45)$$

[‡]Ebben a formájában Navier–Stokes-egyenletnek is szokás nevezni. Navier és Stokes vívmánya persze nem a Newton óta ismert mozgásegyenlet használata, hanem a feszültségtenzor oda behelyettesített (3.15), (3.19) alakjának első felírása volt.

Asztrofizikai fluidumokban a Reynolds-szám rendszerint olyan óriási, hogy azt laboratóriumi és számítógépes kísérletekben még csak megközelíteni sem lehet.

Ha az egyenletben az első tag mellett csak az i -edik tag (T_i) volna jelen, egyensúlyuk alapján a rendszer $\tau_i = \rho v / T_i$ időskálán fejlődne. A mérlegegyenletek advektív tagjához ily módon rendelhető

$$\tau_{\text{dyn}} = l/v \quad (3.46)$$

időskála a *dinamikai időskála*. A diffúzív tagokhoz viszont l^2 /diffúzivitás alakú időskálák rendelhetők; a mozgásegyenlet viszkózus tagjához konkrétan a

$$\tau_{\text{vi}} = l^2/\nu \quad (3.47)$$

viszkózus időskála. A (3.45) Reynolds-szám tehát úgy is felfogható, mint a viszkózus ill. dinamikai időskálák aránya.

ÁLLAPOTEGYENLET A mozgásegyenletet komponensenként tekintve, a kontinuitási egyenlettel együtt eddig összesen négy egyenletünk van. Ezekben azonban a \mathbf{v} sebesség három összetevője és a ρ sűrűség mellett a P nyomás is fellép, mint változó, így a probléma lezárásához további egyenletekre van szükség. A termodinamikai állapotegyenlet éppen ilyen, a nyomást megadó egyenlet; s ha alakja

$$P = P(\rho) \quad (3.48)$$

vagyis a nyomás csak a sűrűségtől függ, ez le is zárja a problémát. Az ilyen állapotegyenletet *barotrop állapotegyenletnek* nevezzük.[§] Gyakran használt speciális eset a *politrop állapotegyenlet*:

$$P = K\rho^\Gamma \quad (3.49)$$

melyet differenciális alakban a

$$\frac{dP}{d\rho} = \Gamma \frac{P}{\rho} \quad (3.50)$$

alakban is felírhatunk. Az ilyen állapotegyenletet leíró Γ *politrop kitevő* helyett gyakran a vele

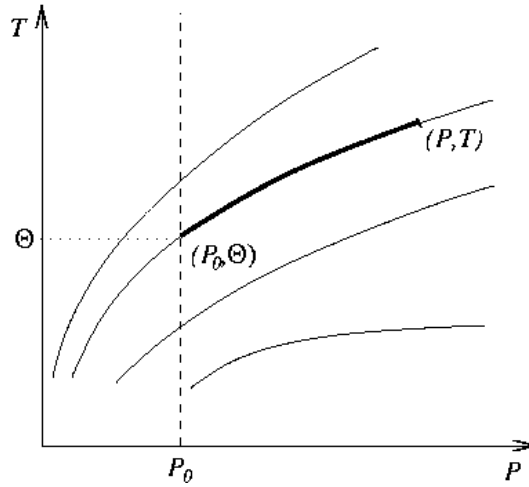
$$\Gamma = 1 + 1/n_p \quad n_p = 1/(\Gamma - 1) \quad (3.51)$$

kapcsolatban álló *politrop index* használatos.

Politrop állapotegyenlet használata az áramlást jelentősen leegyszerűsíti, s emellett több, gyakorlatban fontos esetben igen jó közelítést jelent. Az 1. fejezetben láttuk, hogy az elfajult plazma állapotegyenlete barotrop, s ezen belül a nemrelativisztikus ill. ultra-relativisztikus határeset $\Gamma_1 = 5/3$ ($n_p = 3/2$) ill. $\Gamma_1 = 4/3$ ($n_p = 3$) politropnak felel meg.

De még a nemelfajult gázok esetében is gyakran használható a politrop állapotegyenlet. Ha a dinamikai időskála sokkal hosszabb a hőátadást jellemző termikus időskálánál, a hőmérsékletkülönbségek az áramlás időskáláján mérve szinte azonnal kiegyenlítődnek, így a fluidum izotermikus lesz, $P \propto \rho$, vagyis az állapotegyenlet $\Gamma = 1$ politrop. Az ellenkező határesetben viszont az egyes fluidumelemeknek egyáltalán nem lesz idejük hőt cserélni

[§]Ellenkező esetben, vagyis ha a nyomás a hőmérséklettől is függ, az állapotegyenlet *baroklin*. Az elnevezések arra utalnak, hogy a sűrűség a nyomással ($\beta\alpha\rho\zeta$) együtt változik ($\tau\rho\sigma\eta$) ill. attól eltér ($\kappa\lambda\nu\omega$).



13. ábra: A potenciális hőmérséklet definíciójához

környezetükkel, így állapotváltozásuk az áramlás során adiabatikus lesz, s a Chandrasekhar-kitevők (1.19) definíciója alapján $\Gamma = \Gamma_1$ politrop állapotegyenletet kapunk. (Emlékeztetünk, hogy ideális gázra $\Gamma_1 = 5/3$.)

Ha a fenti két határeset egyike sem áll fenn, a valós megoldás várakozásunk szerint valahol e két szélsőség között lesz, így a politrop megoldás még ekkor is fontos támpontot adhat. A pontos megoldás meghatározásához azonban ekkor már szükség van a hőegyenlet felírására is, hiszen az állapotegyenlet általános esetben a hőmérsékletet is tartalmazza.

Az általános baroklin állapotegyenlet egyszerűsítésének egy másik lehetséges módja az ún. *Boussinesq-közelítés*. Ez abban áll[¶], hogy az állapotegyenlet (1.22) differenciális alakjában a nyomási tagot elhagyjuk:

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha_P dT \equiv -\delta_P \frac{dT}{T}} \quad (3.52)$$

Ez a közelítés folyékony és szilárd közegek esetében mindig jogos, ezekre ugyanis $\delta_T \ll \delta_P$. Ideális gázra ($\delta_P = \delta_T = 1$) viszont a Boussinesq-közelítés nyilván csak akkor használható, ha az állapotváltozás során a relatív nyomásváltozás kicsiny: $\Delta P/P \ll \Delta\rho/\rho \sim \Delta T/T$.

A Boussinesq-közelítés gyakorlati alkalmazásai során azt olykor a Θ *potenciális hőmérséklettel* írjuk fel. Ennek definíciója egy önkényes, '0' indexszel jellemzett referenciaállapotra vonatkozhatva:

$$\Theta = T(P_0/P)^{\nabla_{\text{ad}}} \quad (3.53)$$

Itt ∇_{ad} az (1.18)-ban definiált adiabatikus kitevő. A definícióból következően adiabatikus állapotváltozás során Θ nem változik, vagyis **a potenciális hőmérséklet az entrópia egy (hőmérséklet dimenziójú) mértéke**. Azt a hőmérsékletet adja meg, amit a fluidum akkor érne el, ha adiabatikus állapotváltozással a P_0 referencianyomásra hoznánk.

[¶]Sok szerző a Boussinesq-közelítés részének tekinti az állapotegyenlet egyszerűsítése mellett a kontinuitási egyenlet (3.39) alakú felírását is, vagyis az inkompresszibilitást. Ez a felfogás kevéssé gyümölcsöző, mivel, mint említettük, az asztrofizikában az inkompresszibilitás ritkán alkalmazható közelítés; ugyanakkor (3.52)-et a (3.38) anelasztikus közelítéssel kombinálva sokkal szélesebb körben alkalmazható eredményekhez juthatunk; vö. 4.3. szakasz.

(3.53) alapján

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\Theta}{\Theta} + \nabla_{\text{ad}} \frac{dP}{P} \quad (3.54)$$

amit a (3.52) összefüggésbe helyettesítve a Boussinesq-közelítés gázokban ($\Delta P/P \ll \Delta T/T$) így is írható:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\delta_P \frac{d\Theta}{\Theta} \quad (3.55)$$

HŐEGYENLET Az energiamérleg felírható a legkülönbözőbb energiaformákra, sőt bármely energiadimenziójú termodinamikai mennyiségre (a termodinamikai potenciálokra). Legegyszerűbb, legkönnyebben megjegyezhető, és egyben legszemléletesebb alakja az entrópiával felírt alak, a *hőegyenlet*.

Ennek felírásához elég felidéznünk, hogy ideális fluidum esetén, ha a fluidumelemben belső hő nem termelődik, annak állapotváltozása a mozgás során adiabatikus lesz:^{||} $T dS = 0$, amiből a hőcsere üteme térfogategységenként $\rho T D_t S = 0$. Reális fluidumok, illetve belső energiatermelés esetére ezt általánosítva, (3.28) mintájára az entrópiamérleg:

$$\left. \begin{array}{l} T \partial_t(\rho S) + T \nabla(\rho \mathbf{v} S) \\ \rho T \partial_t S + \underbrace{\rho T \mathbf{v} \nabla S}_{\text{advektív tag}} \end{array} \right\} = - \underbrace{\nabla \mathbf{j}_E}_{\text{diffuzív tag}} + \underbrace{\rho \epsilon_N + Q_J + Q_v}_{\text{források}} \quad (3.56)$$

vagy komponensjelöléssel:

$$\left. \begin{array}{l} T \partial_t(\rho S) + T \partial_i(\rho v_i S) \\ \rho T \partial_t S + \rho T v_i \partial_i S \end{array} \right\} = -\partial_i j_{Ei} + \rho \epsilon_N + Q_J + Q_v \quad (3.57)$$

Itt a felírt hőforrások: az ϵ_N fajlagos (nukleáris) energiatermelés, a Q_J ohmikus disszipáció (Joule-fűtés), valamint a Q_v viszkózus disszipáció, melyek rendre a kötési, elektromágneses és kinetikus energia hővé alakulását jelentik. (A gravitációs potenciális energia közvetlenül nem alakul hővé.)

A (3.56) hőegyenletből kiindulva most már könnyen felírhatjuk az energiamérleg számos további alternatív alakját (most már csak vektoriális jelöléssel, a bal oldal legegyszerűbb formájával). A termodinamika első főtétele alapján egykomponensű vagy fix összetételű közegre

$$D_t E = T D_t S + P/\rho^2 D_t \rho = T D_t S - P/\rho \nabla \mathbf{v}$$

Ezzel az energiaegyenlet

$$\rho D_t E = -\nabla \mathbf{j}_E - P \nabla \mathbf{v} + \rho \epsilon_N + Q_J + Q_v \quad (3.58)$$

A jobb oldalon megjelent újabb tag, mely formálisan egy forrástag, a fluidumelem kitágulása során végzett térfogati munka.

^{||}Éppen erre utal az elnevezés is: $\kappa = D_i = 0$ folytán a fluidumelem mintegy "áthatolhatatlan" (adiabatikus) fallal van körülvéve a hő- és anyagcsere szempontjából.

Az entalpia differenciálja, (1.12), alapján $D_t H = T D_t S + D_t P / \rho$. Ezzel az *entalpiaegyenlet*:

$$\rho D_t H - D_t P = -\nabla \mathbf{j}_E + \rho \epsilon_N + Q_J + Q_v \quad (3.59)$$

Az (1.23) teljes differenciál felhasználásával továbbá rögtön felírhatjuk a *hőterjedési egyenletet*:

$$D_t T - \frac{\delta P}{c_P \rho} D_t P = -\nabla \mathbf{j}_E + \rho \epsilon_N + Q_J + Q_v \quad (3.60)$$

Megjegyzendő, hogy a (3.52) Boussinesq-közelítésben — tehát pl. folyadékok és szilárd közegek esetében — a hőterjedési egyenlet lényegesen egyszerűsödik, mivel a bal oldal második tagja ekkor elhanyagolható. Ha most a diffúzív hőáram (3.5) kifejezését használjuk, akkor állandó hővezetési együttható esetén, források hiányában, nyugvó közegben a hővezetési egyenlet legegyszerűbb

$$\partial_t T = \kappa \nabla^2 T$$

alakjához jutunk, amit a diffúziós egyenlet iskolapéldájaként szokás emlegetni.

A felírt egyenletalakok közül mindig a célnak épp legalkalmasabbat használhatjuk. Bennük a diffúzív hőáram kifejezését (3.5) adja meg, a nukleáris energiatermelés kiszámítását a 2.3.–2.4. szakaszban tárgyaltuk. Az ohmikus disszipáció képletét alább, a 3.4. szakaszban adjuk meg.

A viszkózus disszipáció kiszámításához képezzük a kinetikus energia mérlegét a (3.43) mozgásegyenletet \mathbf{v} -vel skalárisan szorozva:

$$\rho D_t (v^2/2) = \rho \mathbf{v} \mathbf{f} - \mathbf{v} \nabla P + \mathbf{v} \nabla \hat{\tau} = \underbrace{\rho \mathbf{v} \mathbf{f}}_{\text{térfogati erők munkája}} + \underbrace{\nabla (\mathbf{v} \hat{T})}_{\text{felületi erők munkája}} + \underbrace{P \nabla \mathbf{v}}_{\text{tágulási munka}} - \underbrace{\hat{\tau} \nabla \mathbf{v}}_{\text{viszkózus disszipáció}} \quad (3.61)$$

Magától értetődő, hogy a kinetikus energia mérlegében a térfogati és felületi erők által végzett munka forrásként jelenik meg: ez az elem által az erőterektől, illetve közelebbi környezetéből kapott kinetikus energia. A további tagok szükségképpen a kinetikus és belső energia elemen belüli egymásba alakulását írják le; az egyenletet (3.58)-vel egybevetve kitűnik, hogy a viszkózus disszipációt az utolsó tag írja le, tehát annak kifejezése:

$$Q_v = \hat{\tau} \nabla \mathbf{v} = \tau_{ij} \partial_j v_i \quad (3.62)$$

Hogy a belső erők munkája, jobban mondva teljesítménye valóban a (3.61) jobb oldalán bevezetett tag formájában áll elő, könnyen belátható. Mivel az erő az időegység alatti impulzusátadást jelenti, az impulzusáram-sűrűség pedig a feszültségtenzor ellentettje, a $d\mathbf{A}$ normálisú felületelemre ható erő $-\hat{T} d\mathbf{A}$, aminek teljesítménye $-\mathbf{v} \hat{T} d\mathbf{A}$. Ennek a fluidumdarab teljes határoló felületére vett integrálja a Gauss-tétel szerint átalakítható: $-\int \mathbf{v} \hat{T} d\mathbf{A} = -\int \nabla (\mathbf{v} \hat{T}) dV$, vagyis egységnyi térfogatra vetítve $\nabla (\mathbf{v} \hat{T})$. Mivel ez így egy vektortér divergenciája, ez a tag forrás helyett mikroszkopikus kinetikus energiaáramként is felfogható [vö. (3.28)].

(3.61) a mozgásegyenlet egyszerű következménye, új információt nem ad. Ha viszont hozzáadjuk (3.56)-hoz, az energiaegyenlet újabb alakját kapjuk, ezúttal a “teljes” (kinetikus + belső) energiára, vagyis a részecskék makroszkopikus és mikroszkopikus mozgásából adódó energiaformákra:

$$\rho D_t (v^2/2 + E) = -\nabla \mathbf{j}_E - \nabla (P \mathbf{v}) + \nabla (\hat{\tau} \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \mathbf{f} + \rho \epsilon_N + Q_J \quad (3.63)$$

Most a hőegyenlet vonatkozásában is elvégezzük az egyes tagok nagyságrendi összevetését:

$$\underbrace{\rho T \partial_t S}_{\rho T \Delta S / \tau} + \underbrace{\rho T \mathbf{v} \nabla S}_{\rho T v \Delta S / l} = - \underbrace{\nabla \mathbf{j}_E}_{\rho c_P \kappa \Delta T / l^2} + \rho \epsilon_N + Q_J + \underbrace{Q_v}_{\rho \nu v^2 / l^2} \quad (3.64)$$

ahol Δa -val jelöltük a tipikus változását az áramlási térben. Minthogy (1.14) alapján $T \Delta S \sim c_P \Delta T$, az advektív és diffuzív tag arányát a

$$\text{Pe} = lv / \kappa \quad (3.65)$$

Péclet-szám jellemzi, melynek szerepe így a Reynolds-száméval analóg a hőegyenletben. Hasonlóan ahhoz, felfogható a

$$\tau_{\text{th}} = l^2 / \kappa \quad (3.66)$$

termikus időskála és a $\tau_{\text{dyn}} = l / v$ dinamikai időskála arányaként is. A csillagok belsejében a Péclet-szám fontos paraméter, mely a konvektív energiáttranszport relatív hatékonyságát jellemzi a sugárzásos és vezetési energiaátvitellel szemben. Értéke a Reynolds-számmal ellentétben nem feltétlenül magas, a nagy radiatív hővezetési együttható miatt.

A Péclet-szám és a Reynolds-szám hányadosa a

$$\text{Pr} = \nu / \kappa \quad (3.67)$$

Prandtl-szám. Mivel κ -ban a radiatív hődiffuzivitás dominál, forró csillagászati plazmákban a Prandtl-szám gyakran nagyon kicsi. Szilárd anyagokban, pl. a földköpenyben, a hatalmas viszkozitás miatt $\text{Pr} \rightarrow \infty$. Ugyanakkor laboratóriumi körülmények között és számítógépes szimulációkban 1 nagyságrendtől nagyon eltérő Prandtl-számú áramlásokat vizsgálni nemigen tudunk.

A fentiek alapján a viszkozus disszipáció és a hődiffúzió relatív nagyságrendje

$$\text{Pr} \cdot v^2 / c_P \Delta T$$

Ha a fenti második tényező $\gg 1$, akkor egyáltalán nincs szükségünk a hőegyenletre, hiszen ekkor a kicsiny belső energiaváltozás a kinetikus energia (3.61) mérlegét nem képes jelentősen befolyásolni, abban elhanyagolhatók az utolsó tagok — s következésképpen v_i -vel leosztva a mozgásegyenlet $-\nabla P$ tagja is. Tehát a gyakorlatban érdekes esetekben a második tényező $\lesssim 1$. Mivel a Prandtl-szám igen kicsi (tipikusan 10^{-6}), eszerint a **viszkózus disszipáció** csillagászati plazmákban praktikusán mindig **elhanyagolható**.

KÜLSŐ ERŐK Az eddigiekben csak \mathbf{f} -fel jelölt külső erők a gyakorlatban háromféle effektusnak köszönhetőek:

1. Gravitáció. Ekkor $\mathbf{f} = \mathbf{g} = -\nabla U$, ahol \mathbf{g} a nehézségi gyorsulás, U a gravitációs potenciál. Ezt az esetet a következő szakaszban taglaljuk.
2. Lorentz-erő. Mivel a plazma elektromosan semleges, az elektromágneses erők közül csak az $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ Lorentz-erő játszik szerepet. A mágnesezhető fluidumok áramlásainak vizsgálata a *magnetohidrodinamika* tárgyát képezi, melyet a 3.4. és 3.5. szakaszban ismertetünk.
3. Tehetetlenségi erők $\vec{\Omega}$ szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben.** Ezek:

**Transzlációs gyorsuló vonatkoztatási rendszerek esete az általános relativitás elve folytán a gravitáció esetével egyenértékű.

- Centrifugális erő: $\mathbf{f} = \nabla(\Omega^2 a^2/2)$
- Coriolis-erő: $\mathbf{f} = -2\vec{\Omega} \times \mathbf{v}$
- Euler-erő: $\mathbf{f} = -\dot{\vec{\Omega}} \times \mathbf{r}$

A gyakorlatban legfontosabb közülük a Coriolis-erő. A forgó fluidumokról a 3.6. szakaszban esik több szó.

ÖNGRAVITÁLÓ RENDSZEREK. VIRIÁLTÉTEL A gravitációs erőtér általában éppen a vizsgált fluidum távolabbi részeiből ered, így a probléma konzisztens kezeléséhez az állapotegyenlet mellett csatolni kell az azt meghatározó Poisson-egyenletet is:

$$\nabla^2 U = 4\pi G \rho \quad (3.68)$$

Ennek megoldása, mint ismeretes

$$U(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.69)$$

Mint a 3.1. szakaszban láttuk, fluidumként viselkednek a gázok, a folyadékok, de kellően hosszú időskálákon vizsgálva a szilárd anyagok is. Eszerint végső soron *minden égitest fluidumokból álló, véges kiterjedésű, öngravitáló rendszernek tekinthető*. Ebből a fluidummechanika alapegyenleteinek felhasználásával igen fontos univerzális összefüggést nyerhetünk, melynek azok részletes szerkezeti felépítésétől függetlenül minden égitestre teljesülnie kell. Ez az összefüggés az ún. *virialtétele*:

$$\boxed{\frac{1}{2}\ddot{I} = W + 2K + 2\mathcal{E}} \quad (3.70)$$

ahol

$$I = \int r^2 dm \equiv \int r^2 \rho dV \quad (3.71)$$

az égitest tehetetlenségi nyomatéka ($dV \equiv d^3 r$);

$$W = \frac{1}{2} \int \rho U d^3 r = -\frac{G}{2} \iint \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r d^3 r' \quad (3.72)$$

a gravitációs potenciális energiája;

$$K = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \int v^2 \rho dV \quad (3.73)$$

a benne zajló áramlások teljes kinetikus energiája;

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} \int P dV \quad (3.74)$$

pedig a P nyomás fizikai értelmezése (adott irányú impulzusáramsűrűség) alapján, az (1.110) összefüggéssel összhangban a teljes belső energiának az égitestet alkotó részecskék (nemrelativisztikusnak feltételezett) translációs mozgásával (nem pedig pl. a molekulák forgásával) asszociált része.

Levezetés: A 3.43 mozgásegyenlet ideális fluidumra ($\nu = 0$):

$$\rho D_t \mathbf{v} = -\nabla P - \rho \nabla U \quad (3.75)$$

Vegyük ennek \mathbf{r} szerinti első momentumát (azaz szorozzuk be skalárisan \mathbf{r} -rel, majd integráljuk a rendszer egész térfogatára)!

A bal oldal

$$\mathbf{r} \ddot{\mathbf{r}} = (\dot{r} \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{r})^2 = \frac{1}{2}(\ddot{r}^2) - (\dot{r})^2$$

felhasználásával így alakul:

$$\int \mathbf{r} \rho D_t \mathbf{v} dV = \frac{1}{2} \frac{D^2}{Dt^2} \int r^2 \rho dV - \int v^2 \rho dV = \frac{1}{2} \ddot{I} - 2K. \quad (3.76)$$

A jobb oldal első tagja a

$$\mathbf{r} \nabla P = \nabla(\mathbf{r}P) - P \nabla \mathbf{r}$$

parciális deriválással, és felidézve, hogy $\nabla \mathbf{r} = 3$:

$$- \int \mathbf{r} \nabla P dV = 3 \int P dV = 2\mathcal{E} \quad (3.77)$$

[A $\nabla(\mathbf{r}P)$ tag térfogati integrálja a Gauss-tétel szerint felületi integrállá alakítható, amely véges rendszerre a határt kellő távolságban felvéve eltűnik.]

Végül a jobb oldal második tagja:

$$\int d^3 r \rho(r) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \iint \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \frac{x_i (x_i - x'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r d^3 r'$$

Nyilvánvaló, hogy az utolsó alakban x_i és x'_i felcserélésével az integrál értéke nem változhat, hiszen mindkét változóra integrálunk. Ezért a tag tovább így is írható:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\iint \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \frac{x_i (x_i - x'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r d^3 r' + \iint \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \frac{x'_i (x'_i - x_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r d^3 r' \right) = \\ & \frac{1}{2} \iint \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \frac{(x_i - x'_i)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r d^3 r' = \frac{1}{2} \iint \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r d^3 r' = -W/G \end{aligned}$$

Fentieket (3.75) első momentumába beírva adódik (3.70).

A viriáltétel nagy gyakorlati jelentőségét az adja, hogy *minden* égitestre érvényes, tekintet nélkül azok belső szerkezetének részleteire (amiről az asztrofizikában gyakran csak igen korlátozott ismereteink vannak). A tételt leggyakrabban stacionárius állapotú égitestekre alkalmazzuk, ahol a bal oldal eltűnik. Ha ezenfelül az égitest sztatikus, azaz benne nem folynak áramlások, akkor $K = 0$ és így a viriáltétel a

$$\boxed{W + 2\mathcal{E} = 0} \quad (3.78)$$

alakra egyszerűsödik. Ez alapján állíthatjuk például, hogy minden hidrosztatikai egyensúlyban levő égitest belső energiája nagyságrendileg megegyezik annak (tömege és mérete alapján könnyen becsülhető) gravitációs potenciális energiájával:

$$\mathcal{E} \sim PV \sim GM^2/R$$

Így pl. a csillagok termikus egyensúlyának kialakulásához vagy megszűnéséhez szükséges *Kelvin–Helmholtz időskála*

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{GM^2}{RL} \sim \mathcal{E}/L \quad (3.79)$$

Ugyancsak a (3.78) tételből következik, hogy a hidrosztatikai egyensúlyhoz szükséges belső nyomás nagyságrendileg $P \sim G\mathcal{M}^2/R^4$. Ez pl. óriás molekulafelhőkre nagyságrendekkel nagyobb a tényleges nyomásnál, tehát e felhők csak azért maradhatnak fenn, mert bennük heves turbulens mozgások zajlanak, s ezek ellensúlyozzák a gravitáció tömörítő hatását ($W \sim K \gg \mathcal{E}$).

Történeti vonatkozások:

A tételt először Clausius vezette le 1870-ben, pontrendszerekre. Clausius a $\sum m_i \mathbf{v}_i \mathbf{r}_i$ (azaz folytonos közegben $\int \rho \mathbf{v} \mathbf{r} dV$) mennyiséget nevezte valamilyen szeszélyből “viriálnak”. (A kifejezés gyökere a “hatóerő” jelentésű latin *vis* szó.) Mivel $\dot{\mathbf{r}} \mathbf{r} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2)$, eszerint (3.70) bal oldalán a viriál időderiváltja áll, azaz a tétel a viriál változási ütemét adja meg.

A viriáltétel általánosításai:

Feladat: Hogyan módosul a viriáltétel, ha figyelembe vesszük a fluidum viszkozitását? Elképzelhető-e olyan eset, ahol az ebből eredő módosulás számottevő?

Feladat: A (3.138) magnetohidrodinamikai mozgásegyenlet alapján mutassuk meg, hogy ha az égitest anyaga kvázineutrális plazma, akkor a viriáltétel alakja (3.70) helyett

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = W + 2K + 2\mathcal{E} + \mathcal{E}_M \quad (3.80)$$

ahol

$$\mathcal{E}_M = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV \quad (3.81)$$

az égitest mágneses terének energiája.

Feladat: Mutassuk meg, hogy ha az R sugarú égitest véges P_0 nyomású homogén gázba ágyazódik, akkor a viriáltétel alakja (3.70) helyett

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = W + 2K + 2\mathcal{E} - 4\pi R^3 P_0 \quad (3.82)$$

(Ennek a tagnak a még ködbe ágyazott protocsillagok esetében van jelentősége.)

3.3 HIDROSZTATIKA

HIDROSZTATIKA EGYENSÚLY Gravitációs térben a (3.43) mozgásegyenlet sztatikus ($\mathbf{v} = 0$) esetben a

$$\nabla P = \rho \mathbf{g} \equiv -\rho \nabla U \quad (3.83)$$

alakot ölti, ahol \mathbf{g} a nehézségi gyorsulás és U a gravitációs potenciál. Ez a *hidrosztatikai egyensúly egyenlete*.

Az előző szakaszban láttuk, hogy az U gravitációs potenciál (3.69) általános alakja egy meglehetősen bonyolult, csak numerikusan kezelhető integrál. Ez az integrál azonban bizonyos egyszerű geometriák esetén nagyon leegyszerűsödik, vagy éppen teljességgel megkerülhető. Ilyen eseteket tárgyalunk ebben a szakaszban.

RÉTEGZETT KÖZEGEK A legegyszerűbb eset, ha a $\mathbf{g} =$ állandó feltevéssel élhetünk (3.83)-ban, így a Poisson-egyenlet megoldása nem szükséges. Ez az égitestek vékony külső

rétegeiben (pl. légkörében) jelent helyileg jó közelítést. Koordinátarendszerünk z -tengelyét \mathbf{g} -vel ellentétesen irányítva ("magasság"), $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ (\mathbf{e}_z a z irányú egységvektor), s a hidrosztatikai egyenlet a

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (3.84)$$

alakot ölti. Eszerint a változók csak a magasságtól függenek, a közeg vízszintes irányban homogén, vagyis *rétegzett*. A skálahossz (3.34) definíciója alapján *a nyomás skálamagassága*

$$H_P = \frac{P}{\rho g} \quad (3.85)$$

Konstans sűrűség esetén (folyadék vagy szilárd test) a hidrosztatikai egyenletből nyilvánvaló, hogy a nyomás a mélységgel lineárisan nő.

Ideális gáz esetén (3.85) és az állapotegyenlet alapján

$$H_P = \frac{\mathcal{R}T}{\mu g} \quad (3.86)$$

Az (1.71) állapotegyenlet logaritmusának differenciálját véve továbbá

$$\frac{1}{H_P} = \frac{1}{H_\rho} + \frac{1}{H_T} \quad (3.87)$$

Izoterm ideális gáz esetén eszerint (3.84) megoldása

$$P/P_0 = \rho/\rho_0 = \exp(-z/H_P) \quad (3.88)$$

Az izoterm atmoszféra csak egyik ($\Gamma_0 = 1$) speciális esete a

$$P = K \rho^{\Gamma_0} \quad (3.89)$$

politróp atmoszférák családjának. A fenti politróp összefüggés logaritmikus differenciálja alapján a skálamagasságok összefüggése politróp atmoszférában:

$$H_\rho = \Gamma_0 H_P \quad (3.90)$$

Ezt a (3.87) relációval összevetve a hőmérséklet skálamagassága ideális gázból álló politróp atmoszféra esetén:

$$H_\rho = \Gamma_0 H_P \quad H_T = \frac{1}{\Gamma_0 - 1} H_\rho = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_0 - 1} H_P \quad (3.91)$$

Feladat: Hogyan változik a sűrűség a magassággal izentropikus atmoszférában ($\Gamma_0 = 5/3$)?

Feladat: Határozzuk meg a légkör skálamagasságát a Vénusz, a Föld, a Mars, és a Titán esetében!

Feladat: Az utasszállító repülőgépek kabinnyomása ...bar, mivel ez a legalacsonyabb, az ember számára még könnyen (hegyi betegség nélkül) elviselhető légnyomásérték. Ha ez így van, legfeljebb milyen magasra érdemes építeni csillagászati obszervatóriumokat?

HOMOGEN, ILLETVE IZOTERM GÖMBÖK Mint a potenciálméletből tudjuk, gömbszimmetrikus tömegeloszlás esetén a gravitációs potenciál (3.69) kifejezése lényegesen egyszerűsödik:

$$U(r) = -G\mathcal{M}(r)/r \quad (3.92)$$

vagyis azt a középponttól r távolságban csak az r sugarú gömbön belüli anyag $\mathcal{M}(r)$ össztömege határozza meg (Newton tétele; ez egyben pl. az elektrosztatikai Faraday-kalitka alapelve). Ez a tömeg a ρ sűrűséggel nyilvánvalóan az

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr' \quad (3.93)$$

vagy differenciálva

$$\frac{d\mathcal{M}(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (3.94)$$

kapcsolatban áll. A hidrosztatikai egyenlet alakja pedig most

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g = \rho \nabla U = -G \frac{\mathcal{M}(r)}{r^2} \rho \quad (3.95)$$

R sugarú, állandó sűrűségű (folyadékból vagy gázból álló) gömb belsejében tehát a hidrosztatikai egyenlet megoldása:

$$P = 4\pi G \rho^2 (R^2 - r^2)/3 \quad (3.96)$$

Az állandó hőmérsékletű gáz esetében viszont egy megoldás, mint visszahelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető:

$$P/P_0 = \rho/\rho_0 = \quad (3.97)$$

Ez a formális megoldás, az ún. *szinguláris izoterm gömb* azonban nem lehet fizikai, hiszen egyfelől tömege végtelen (integrálja $r \rightarrow \infty$ -ben divergál), másfelől a centrumban szinguláris. Az előbbi probléma viszonylag könnyen kiküszöbölhető, ha feltesszük — amint az minden égitestre igaz is —, hogy a gömb igen ritka, végtelen, homogén közegbe ágyazódik (pl. csillagközi anyag). Így a gömb sugara véges lesz, felszínén pedig nyomásegyensúlyban lesz a diffúz közeggel.

Feladat: Adjunk alsó becslést a nyomásra a Nap középpontjában!

Feladat: Hogyan változik a sugárral a nehézségi gyorsulás és a nyomás egy r sugarú vasmagból ($\rho_1 =$) és körülötte R sugarú szilikátköpenyből ($\rho_2 =$) álló bolygó belsejében?

Feladat: Szilikátos kőzetek szakítószilárdsága..., a vasé ... Legalább milyen átmérőjűnek kell lenniük a kőzet- ill. vasmaggal rendelkező aszteroidáknak ahhoz, hogy a nehézségi erő gömb alakúvá tegye őket?

POLITROP GÁZGÖMBÖK

A CSILLAGSZERKEZETI EGYENLETEK Ismételjük itt meg a gömbszimmetrikus tömegeloszlású égitest sztatikus egyensúlyi állapotára már felírt (3.94) és (3.95) egyenleteket:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{\mathcal{M}(r)}{r^2} \rho \quad (3.98)$$

$$\frac{d\mathcal{M}}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (3.99)$$

Ha az állapotegyenlet — az eddig vizsgált esetekkel ellentétben — nem baroklin, szükségünk van a hőegyenletre is. Ebben az $L(r) = 4\pi r^2 j_E$ folyó *luminositást* bevezetve a *sugárzásegyensúly egyenletére* jutunk:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon_{Nu} \quad (3.100)$$

A hőáramot a (3.5) diffuzív alakban felvéve:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{\rho c_P \kappa} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad (3.101)$$

A fenti (3.98)–(3.101) egyenletek együttesen alkotják a *csillagszerkezeti egyenleteket*. Bennük az ismeretlen függvények: ρ , P , T , $L(r)$, $\mathcal{M}(r)$; az ötödik egyenlet az állapotegyenlet, melyben a gáznyomást és a sugárnyomást egyaránt figyelembe vesszük:

$$P = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T + \frac{1}{3} a T^4 \quad (3.102)$$

A μ , ϵ_N , κ anyagi állandók statisztikus fizikai és kinetikai számításokból nyerhetők ρ , T , és a kémiai összetétel függvényében, amint azt az 1.2.-1.3., 2.3. és 6.2. szakaszban részletezzük. Az eredmények táblázatok ill. félempirikus közelítő formulák alakjában a szakirodalomban hozzáférhetők.

3.4 A HUBBLE-ÁRAMLÁS

NEWTONI KOZMOLÓGIA Tekintsünk most egy további, látszatra megtévesztően egyszerű sűrűségeloszlást: a végtelen, homogén közeget. Ha az Univerzum homogén és izotrop (márpedig nincs okunk azt hinni, hogy ne lenne az), akkor ez akár a Világegyetem nagyléptékű szerkezeti modelljének is felfogható.

A newtoni mechanikában általánosan érvényes (3.68) Poisson-egyenlet (3.69) megoldása állandó sűrűség esetén, a Newton-tétel figyelembevételével

$$U(r; r_0) = -\frac{4\pi G \rho}{3} a^2 \quad \mathbf{a} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \quad (3.103)$$

vagyis

$$\mathbf{g}(r; r_0) = -\nabla U = -\frac{4\pi G \rho}{3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3.104)$$

Itt \mathbf{r}_0 formálisan integrációs állandó; fellépte annak köszönhető, hogy végtelen homogén közeg sűrűségeloszlása tetszőleges \mathbf{r}_0 helyvektorú pont körül gömbszimmetrikus, így a Newton-tétel bármely ilyen pont körül felírható. Tévedés lenne tehát azt gondolni, hogy, mivel a homogén közegben nincs kitüntetett irány, a \mathbf{g} nehézségi gyorsulásvektornak szimmetriaokokból el kell tűnnie: valójában arról van szó, hogy \mathbf{g} iránya önmagában meghatározatlan, csak egy \mathbf{r}_0 referenciapontra (vonatkoztatási rendszerünk önkényesen felvett origójára) vonatkoztatva értelmezhető.

\mathbf{g} fenti kifejezését a (3.43) mozgásegyenletbe helyettesítve látható, hogy a jobb oldal egyetlen nemzéró tagja ideális fluidumban a nehézségi erő, hiszen a nyomás a homogén közegben állandó. Eszerint tehát a bal oldal nem lehet nulla: $D_t \mathbf{v} \neq 0$. Tehát még ha egy kezdeti időpontban $\mathbf{v} \equiv 0$ is, ez az állapot nem maradhat fenn, és a fluidum mozgásba jön.

A homogén fluidumban a sebességnek az \mathbf{r}_0 origójú vontakoztatási rendszerben szimmetriaokokból mindenképpen csak sugárirányú komponense lehet. Kezdetben nyugvó közeg esetén a gravitációs gyorsulás (3.104) szerint a közeg összehúzódásához fog vezetni. Ugyanakkor más kezdeti feltételekkel természetesen táguló megoldás is elképzelhető; ekkor a gravitáció a tágulás ütemét lassítja (hasonlóan a nyugalmi helyzetből leejtett, illetve a feldobott, lassulva emelkedő kő esetéhez). Már egyszerű newtoni megfontolásokkal is ki lehet tehát mutatni, hogy az ilyen **végtelen, homogén fluidum nem maradhat tartósan mozdulatlan, sztatikus: összehúzódnia vagy tágulnia kell.**

Hubble jól ismert megfigyelései szerint **az Univerzumban a tágulás esete valósul meg.** A kontinuitási egyenlet szerint a sűrűség csak úgy maradhat a helytől független, ha $d_r v = -\partial_t(\ln \rho) = H$, ahol H a helytől független állandó. Tehát a tágulási sebesség (az \mathbf{r} helyvektorú pont \mathbf{r}_0 -tól való távolodási sebessége

$$\dot{a} = H a \quad a = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \quad (3.105)$$

Az ilyen áramlás a *Hubble-áramlás*, a galaxisok sebességeiben való megnyilvánulása pedig az empirikus *Hubble-törvény* (Hubble 1925). A H *Hubble-féle állandó* értéke a megfigyelések szerint

$$H = 71 \pm 4 \text{ km/s/Mpc} \quad (3.106)$$

A végtelen homogén közeg "tágulásának" természetesen nincsen középpontja, illetve a tér bármely pontja a tágulás középpontjának tekinthető. A tágulás csupán bármely két fluidumelem (3.105) szerinti távolodásában, valamint a sűrűség — a tér minden pontjában azonos ütemű — csökkenésében nyilvánul meg.

A tágulás időbeli alakulásának vizsgálatához írjuk fel egy fluidumelem (3.61) mechanikai energiamérlegét, ami itt a teljes mechanikai energia megmaradását jelenti (hiszen a jobboldal egyetlen nemzéró tagja, $\rho \mathbf{v} \mathbf{f}$ a potenciális és kinetikus energia egymásba alakulását képviseli). Az origónk körüli a sugarú gömb peremén fekvő, egységnyi tömegű fluidumelem összes, a gömb középpontjára vonatkoztatott mechanikai energiája tehát — a c fénysebességhez kapcsolt önkényes egységekben kifejezve — egy $E = -kc^2/2$ állandó:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -k \frac{c^2}{2} \quad (3.107)$$

amit átrendezve a *Friedmann-egyenlethez* jutunk:

$$\frac{8\pi G}{3} \rho = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + k \frac{c^2}{a^2} \quad (3.108)$$

Mivel $k \neq 0$ esetén, a megfelelő választásával $|k| = 1$ mindig biztosítható, elegendő a $k = 0, \pm 1$ esetek vizsgálata. A Hubble-áramlásban bármely két fluidumelem távolsága minden időpontban arányos két, önkényesen kiválasztott és rögzített fluidumelem a távolságával, tehát valóban elegendő a egy önkényesen megválasztott kezdeti értékét

vizsgálni. Az egyenleteinkben függő változóként fellépő a -t ezért *skálafaktornak* szokás nevezni. (Másik elnevezése az *Univerzum sugara*.)

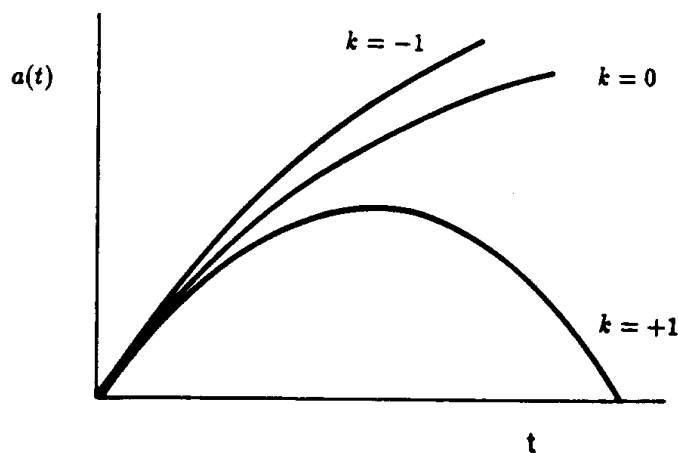
Mivel a tömeg a tágulás során megmarad,

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3 = \text{const.} \quad (3.109)$$

(Itt ρ_0 és a_0 tetszőleges $t = t_0$ időpontban — pl. ma — érvényes referenciaértékek.) Ezt (3.108)-ba helyettesítve a megoldás $k = 0$ esetén

$$a = Ct^{2/3} \quad C = (6\pi G\rho_0)^{1/3} a_0 \quad (3.110)$$

Eszerint a értéke a $t = 0$ időpontban, vagyis véges t_0 idővel ezelőtt, nulla volt, s ugyanekkor a sűrűség végtelen volt: ez az *Ősrobbanás*.



14. ábra: A skálafaktor időfüggése különböző k értékek esetén

Nemzéro összenergia ($k \neq 0$) esetén a tágulás, k előjelétől függően, értelemszerűen gyorsabb vagy lassabb a fenti megoldásnál. A megoldásgörbék alakja a tömegpont gravitációs terében végzett függőleges hajítás elemi esetéhez hasonló (14. ábra), s a k előjele szerinti három eset a centrális erőterben való mozgás három alapesetének (elliptikus, parabolikus, hiperbolikus) felel meg. $k = +1$ negatív összes mechanikai energiát jelent, tehát ilyenkor a kiszemelt gömb (s így az Univerzum) tágulása nem folytatódhat a végtelenségig: egy maximális sugár elérése után a tágulásnak vissza kell fordulnia (oszillatorikus modell).

A (3.108) egyenlet alapján $k = 0$ esetén

$$\rho = \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} = (7.0 \pm 2.5) \cdot 10^{-30} \text{ g/cm}^3. \quad (3.111)$$

míg $k = +1$ esetén a sűrűség ennél nagyobb, $k = -1$ esetén kisebb. Az észlelések szerint a Világegyetemben a tömegsűrűség jóval a ρ_c kritikus sűrűség alatt marad; ugyanakkor a tágulási időbeli alakulása — amely a fény véges terjedési sebességét kihasználva, nagyon távoli objektumok mozgásának megfigyelésével közvetlenül is vizsgálható — inkább a kritikus $k = 0$ esethez áll közel. Ezt a látszólagos ellentmondást csak a relativisztikus kozmológia oldja fel.

Eredményeink leszámraztatásához csak olyan fizikai ismereteket használtunk, melyek a 17.-18. század fordulóján már közkézen forogtak. Eszerint tehát már akár maga Newton is felvázolhatta volna a 20. századi kozmológia alapvonalait — csupán az empirikus megkötések nem álltak rendelkezésre a modernebb észlelési technikák megjelenéséig.

Feladat:

Ha a táguló Univerzum egy galaxisában élő megfigyelő számára a fizika inerciarendszerbeli törvényei érvényesek, a homogenitás miatt ennek egy távoli másik galaxisban is így kell lennie. Hogyan egyeztethető ez össze azzal, hogy a két galaxis a Hubble-áramlásban egymáshoz képest gyorsuló mozgást végez?

RELATIVISZTIKUS KOZMOLÓGIA A relativitáselmélet szerint a tömeg csupán az energia egyik formája; energiadimenziójú alakja az mc^2 nyugalmi energia. A gravitációs tér forrása azonban nemcsak a nyugalmi, hanem a teljes energia. Nemrelativisztikus részecskék esetében ez nem jelent nagy különbséget, hiszen ezek egyéb energiaformái elenyészők a nyugalmi energiához képest. Az Univerzumban azonban relativisztikus részecskék is vannak (fotonok, neutrínók,...). A tágulás leírásában ez két módosításhoz vezet.

Egyrészt a (3.112) Friedman-egyenletbe ρ helyett u_T/c^2 írandó, ahol u_T a teljes energiasűrűség:

$$\frac{8\pi G}{3c^2}u_T = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + k\frac{c^2}{a^2} \quad (3.112)$$

Másfelől a teljes energiasűrűsége (3.109) nem alkalmazható; ehelyett csatolnunk kell a fluidummechanikai energiaegyenletet is. Mivel az Univerzum egésze kívülről nem vehet fel hőt és források sincsenek*, a tágulás (3.56) ill. (3.58) szerint adiabatikus lesz:

$$D_t S \equiv D_t E + P D_t V = 0 \quad (3.113)$$

Ennek integrálalakját $V = a^3$ nagyságú fluidumdarabra felírva $E = u_T a^3$, így

$$\frac{d}{dt}(u_T a^3) + P \frac{d}{dt}a^3 = 0. \quad (3.114)$$

(3.112) és (3.114) a *standard kozmológia alapegyenletei*.

A (3.112) és (3.114) egyenletek voltaképpen az általános relativitáselmélet alapegyenleteinek, az

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R_{jj} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} - \Lambda g_{ik}. \quad (3.115)$$

Einstein-egyenleteknek homogén és izotrop esetre felírt speciális esetei. Itt a g_{ik} *metrikus tenzor* és az R_{ik} *görbületi tenzor* a négydimenziós téridő-kontinuum geometriáját jellemzik, T_{ik} az anyag energia-impulzus tenzora, Λ pedig az ún. *kozmológiai konstans*, mely az Einstein-egyenletek variációs elvből való leszámraztatásánál integrációs állandóként jelenik meg. Ezen általánosabb leszámraztatás fő hozzádka, hogy a $k \neq 0$ esetekben a valóban a görbült téridőkontinuum görbületi sugarával arányos; továbbá, hogy $k = +1$ a Bolyai-geometriával jellemzett zárt térnek, $k = -1$ pedig a Riemann-geometriájú nyílt térnek felel meg.

Mivel újabb változóként P is fellépett, az egyenletek lezárásához szükség van az Univerzumot kitöltő anyag $P(u_T)$ állapotegyenletére is. A kozmológiai állapotegyenlet alakja

*A csillagokban folyó magreakciók nyugalmi energiát alakítanak elektromágneses sugárzási energiává, így a teljes u_T energiasűrűséget nem módosítják.

(1.113) és (1.114) szerint

	Állapotegyenlet	$k = 0$ megoldás	
Nemrelativisztikus fluidumra:	$P = 0$	$a \propto t^{2/3}$	(3.116)
Ultrarelativisztikus fluidumra:	$P = \frac{1}{3} u_T$	$a \propto t^{1/2}$	
Vákuumra:	$P = -u_T$	$a \propto e^t$	

Az Univerzum észlelhető anyagában ma a barionos anyag (nukleonok, elektronok) dominál, mely túlnyomóan nemrelativisztikus. Az Univerzumot kitöltő anyag gravitációs csomósodására vonatkozó modellek és az észlelések egybevetése azt mutatja, hogy még a csak közvetetten, gravitációs hatása alapján kimutatható *sötét anyag* is valószínűleg zömmel eddig felfedezetlen, nemrelativisztikus részecskékből áll (ún. hideg sötét anyag, CDM). Ezért ha csak ezeket az anyagformákat vesszük figyelembe jelenleg $P = 0$ kitűnő közelítést jelent. Ez esetben (3.114) a várakozásnak megfelelően (3.109)-ra redukálódik, így a $k = 0$ esetben (*Einstein-de Sitter modell*) a fenti $a \propto t^{2/3}$ jellegű megoldást kapjuk vissza.

Az ultrarelativisztikus összetevőkre viszont (3.114) szerint (3.109)-tel ellentétben $u_T \propto a^{-4}$. Ez könnyen megérthető, hiszen pl. a kozmoszt kitöltő mikrohullámú háttérsugárzás fotonjainak hullámhossza a térrel együtt tágul, így energiájuk a^{-1} szerint csökken. A fotonok energiasűrűsége tehát meredekebben (a^{-4} szerint) csökken, mint a nemrelativisztikus részecskéké (a^{-3} szerint). Eszerint egy bizonyos időpont előtt az energiasűrűség zömét a relativisztikus anyag (sugárzás) adta. Ez az időpont korszakunk, a *galaxiskor* kezdete; előtte a kozmológiai állapotegyenletet helyesebb $P = \frac{1}{3} u_T$ alakban közelíteni. (Természetesen a két alak között az átmenet valójában folytonos volt.) A (3.112) egyenlet megoldása ez esetben $a \propto t^{1/2}$, vagyis a modell így is ősrobbanáshoz vezet.

Egészen más jellegű megoldást kapunk akkor, ha a közeg teljes energiasűrűségében a vákuum járuléka dominál. Mint könnyen ellenőrizhető, a megoldás ekkor $a \propto \exp t$ alakú.

Mint már az 1.5. szakaszban láttuk, a vákuum energiasűrűsége a tágulás során a többi anyagformáéval ellentétben az időben nem változik, Ezek szerint bármilyen kicsiny véges vákuum-energiásűrűség előbb-utóbb dominánssá válik. A tágulás időfüggésére vonatkozó legújabb észlelési megkötések alapján az utóbbi években derült rá fény, hogy a vákuum energiasűrűsége, az ún. "sötét energia" éppen a mi korunkban kezd ismét jelentőssé válni. Ezek szerint a kozmológiai állapotegyenletben a nyomás ma egy nemrelativisztikus gáznyomás és a vákuum nyomásának összege.

Mint az (3.112) és (3.115) egybevetésével rögtön látható, a vákuum u_v nemzéro energiasűrűsége ekvivalens az Einstein-egyenletekben fellépő kozmológiai konstans nemzéro értékével. A kapcsolat:

$$\Lambda = 8\pi G u_v / c^4 \quad (3.117)$$

E tag megfigyelhető fizikai következményeit illetően fontos következtetésre jutunk (5.2) deriválásával, és (5.3)-at felhasználva:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(u + 3P)a. \quad (3.118)$$

Mivel a vákuumra $u = -P = \text{konstans}$, a pedig bármely két rögzített pont távolsága, a Λ -tag egy, a távolsággal lineárisan növekvő (Λ előjelétől függően vonzó vagy taszító) erőnek felel meg. Ezért a tag csak nagy léptékeken jelentős, innen származik elnevezése: kozmológiai konstans.

A ρ_c kritikus sűrűség kiemelkedő jelentősége miatt a kozmológiában az Univerzum energiasűrűségéhez adott különféle járulékokat dimenziótlan formában az $\Omega \equiv u/\rho_c c^2$ mennyiséggel szokás jellemezni. A mai adatok szerint az Univerzum teljes Ω értéke igen közel áll az egységhez, így k értéke empirikusan eldönthetetlen. Az energiasűrűséghez a különböző anyagformák járuléka:

Sötét energia	Ω_ν	= 0.73
Hideg sötét anyag (CDM)	Ω_{CDM}	= 0.22
Barionos anyag	Ω_b	= 0.045
ebből az észlelt	Ω_o	= 0.003
Neutrínók	Ω_ν	= 10^{-4}
Fotonok	Ω_{CMB}	= 10^{-5}

Az Ősrobbanás 13.7 ± 0.2 milliárd éve történt, s mivel a vákuum energiasűrűsége egyre nagyobb hányadát képviseli az egésznek, a tágulás egyre gyorsulva várhatóan mindörökké folytatódni fog.

Feladat:

Az egyes kozmológusok által *ad hoc* bevezetett, *kvintesszenciának* elnevezett kvantumtér állapot-egyenlete $P = wu$, ahol $w \neq -1$. Határozzuk meg a skálafaktor időfüggését kvintesszencia-dominált Univerzumban!

INFLÁCIÓ A vákuum-dominált Univerzumra kapott $a \propto e^t$ jellegű megoldás hihetetlenül gyors, exponenciális tágulást, az Univerzum "inflációját" (felfúvódását) jelenti. Az ún. *inflációs kozmológia* elmélete éppen azt teszi fel, hogy az Ősrobbanást követő igen korai időszakban, valamikor $t = 10^{-32}$ s előtt a vákuum energiasűrűsége sokkal nagyobb volt, mint ma, s az energiasűrűség túlnyomó részét ez adta. Így e szakaszban az Univerzum hirtelen hihetetlen mértékben felfúvódik (10^{20} – 10^{30} -os faktorialis nő): ez volna az Univerzum inflációs fázisa. Később pedig a vákuum e magasabb energiájú állapotából egy "aszimmetrikus", sokkal alacsonyabb energiájú állapotba bilent át, így a továbbiakban a standard modell szerint (relativisztikus, majd nem relativisztikus állapotegyenlettel) fejlődött tovább.

Mivel a vákuum energiasűrűsége a tágulás során a többi anyagformáival ellentétben az időben nem változik, elég korai időkben, az infláció előtt a többi anyagforma energiasűrűsége tetszőlegesen nagy vákuum-energiasűrűségnél is nagyobb lehetett, így az exponenciális jellegű megoldás csak véges időintervallumban volt jellemző. Az Ősrobbanás tehát a fenti egyenletekből az inflációs kozmológia mellett is elkerülhetetlenül következik.

Az inflációs modellt eredetileg a klasszikus kozmológia következő két problémájának megoldására javasolták:

- **A horizontprobléma.** A horizont az a felület, amelyről az Ősrobbanás pillanatában elindult fénysugár most ér(ne) a megfigyelőhöz. A klasszikus modellben a horizont tágulása gyorsabb, mint a rajta fekvő anyagé, ezért a horizont által felölelt térrész monoton nő: a jelenleg belépő tartományok tehát azelőtt semmilyen módon nem lehettek kauzális kapcsolatban egymással. Így viszont az Univerzum homogenitása csak úgy magyarázható, ha a kezdeti feltételek eleve biztosították az egymással oksági kapcsolatban nem álló tartományokban az azonos viszonyokat.

Az utóbbi években a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás (CMB) anizotrópiájára vonatkozó észlelési adatokból kiderült, hogy a CMB emissziója idején a horizontnál jóval nagyobb

méretű fluktuációk hőmérséklete és polarizációja között szignifikáns antikorrreláció mutatkozik. Ez az ilyen léptékű tartományok előzetes kauzális kapcsolata nélkül még a homogenitásnál is nehezebben volna megmagyarázható.

- **A laposság problémája.** Az (5.2)–(5.3) egyenletek alapján ki lehet mutatni, hogy a klasszikus modellben $|\Omega - 1|$ monoton nő. Miután Ω ma is 1 nagyságrendű (az Univerzum viszonylag lapos), korábbi korokban Ω -nak nagyon pontosan meg kellett közelítenie az $\Omega = 1$ értéket. Pl. a $t = 10^{-49}$ s Planck-időnél Ω 10^{-60} pontossággal különbözött csak egytől!
- **A barionkeltés problémája.** Az Univerzumban a fotonok száma ma kb. 10^9 -szer meghaladja a barionokét. Másrészt (??) értelmében a sugárzási korban ($P = u/3$) az energiasűrűség $u \propto a^{-4}$, vagyis a fotonok száma az Univerzum sugárzási korszakában sem változott. Így a mai fotonok mindenike egy-egy, a leptonkor végén részecske-antirészecske annihiláció során létrejött fotonnak feleltethető meg. A párkeltési és annihilációs folyamatok egyensúlya esetén pedig, azaz a lepton-, hadron- és kvarkkorban a fotonok és az $mc^2 > kT$ részecskefajták száma nagyjából megegyezik, amiből az a következtetés adódik, hogy pl. a kvarkkorszakban a kvarkok teljes száma 10^9 -szerese volt a kvark/antikvark különbségnek. Honnan ered ez a rendkívül kicsiny többlet?

Hogyan oldja fel az infláció e nehézségeket? Az infláció idején a horizont sugara kb. állandó, rajta az anyag kifelé áramlik, ezért így a jelenleg kauzálisan még nem kapcsolt régiók az infláció előtt már egyszer kapcsolatban állhattak egymással, és a horizontprobléma nem merül fel. Az inflációs korszakban pedig, mint egyenleteinkből kimutatható, Ω 1-hez tart, így az Univerzum észlelt lapossága is megmagyarázható. Sőt: az infláció Ω értékét olyan hatékonyan közelíti 1-hez, hogy az még ma is rendkívül közel kell álljon az egységhez. És valóban: az utóbbi évek megfigyelési adatainak összesítésével kapott, fent felsorolt Ω értékek összege a kis (kb. 1–2%-nyi) hibahatáron belül éppen 1! Ez igen erős érv az inflációs modell helyessége mellett.

A bariontöbblet értelmezése az erős és elektromos kölcsönhatásokat egyesítő ún. nagy egyesített elméletek alapján lehetséges, ha a kísérleti bizonyítékok hiánya ellenére elfogadjuk ezen elméleteknek a barionszám-megmaradás sérülésére vonatkozó jóslatait. A kvark/antikvark mennyiségi szimmetria sérülését az infláció nagyságrendekkel fokozhatja.

Az infláció vonzóan egyszerű képet fest a galaxisok képződéséhez vezető sűrűségfluktuációk korai spektrumáról is. Az Univerzum hatalmas felfúvódása miatt az infláció kezdetén minden érdekes mai struktúra mérete a horizont infláció előtti és utáni sugara közé esett, vagyis ezek valamikor az infláció alatt “nőtték ki” a horizontot. A horizonton túlnőve különböző részeik már nem voltak kauzálisan kapcsoltak, így amplitúdójuk koherensen nem változhatott, hanem “befagyott” egészen addig, míg sokkal később, a sugárzási korban, ismét utol nem érte őket a horizont. Tehát a fluktuációk eredeti amplitúdóját a horizonton való túllépésükkor meglevő amplitúdójuk határozta meg. Viszont a horizont méretének változatlansága és az infláció exponenciális jellege folytán ez az amplitúdó is időfüggetlen kellett legyen (exponenciális időfüggésnél az időskála nullpontja önkényes) — vagyis az eredeti fluktuációspektrum *skálafüggetlen* volt, azaz egy $\delta \equiv \langle (\rho'/\rho)^2 \rangle^{1/2} = a^n$ hatványfüggvény (*Zeldovics-spektrum*). A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás (CMB) anizotrópiájára vonatkozó legújabb észlelési adatok szerint a CMB emissziója idején a sűrűségfluktuációk spektrálindexe valóban nagy pontossággal állandó ($n = 1$).

A magas korai vákuum-energiasűrűséget eredetileg az elektromos elméletben fellépő ún. Higgs-ternek tulajdonították, utóbb azonban kiderült, hogy e tér tulajdonságai nem teljesítik az inflációs modell működőképességéhez szükséges feltételeket. Manapság ezért az inflációt egyszerűen egy nem specifikált kvantumtér számlájára írják. A fenti típusú állapotegyenlethez és így exponenciális táguláshoz vezethet pl. még korábbi időkben a valamennyi kölcsönhatást egyesíteni próbáló szuperhúr-elméletekben az eredetileg tízdimenziós téridő-kontinuum hat térdimenziójának kompaktifikációja is.

3.5 A MAGNETOHIDRODINAMIKA (MHD) ALAPJAI

INDUKCIÓS EGYENLET Az Univerzum barionos anyagának nagy részét részben vagy egészen ionizált gáz, *plazma* alkotja. Az ilyen vezető fluidum áramlására az elektromos és mágneses erők is hatással vannak, ezért a fluidummechanika egyenleteihez csatolnunk kell a Maxwell-egyenleteket is.

A vezető fluidumok tárgyalását lényegesen leegyszerűsíti két, igen széles körben alkalmazható feltevés, melyek együttesen *magnetohidrodinamikai közelítés* néven ismertek:

- (1) A fluidum *kvázineutrális*, azaz a benne található szabad pozitív és negatív töltések bármely makroszkopikusan kicsiny részében kiegyenlítik egymást, így a makroszkopikus töltéssűrűség $\rho_e = 0$. Ennek folytán a negyedik Maxwell-egyenlet $\nabla \mathbf{E} = \rho_e / \epsilon_0 = 0$ alakra egyszerűsödik
- (2) A mozgás *nemrelativisztikus*, így az első Maxwell-egyenlet utolsó tagja, az $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ eltolódási áram elhanyagolható. (Valóban, az egyenlet bal oldala $\nabla \times \mathbf{B} \sim B/l$ alakban becsülhető, ahol l az áramlás jellemző léptéke: eszerint $l/\tau \ll c$ esetén az eltolódási áram kicsiny a bal oldalhoz képest.)

A Maxwell-egyenletek tehát az MHD közelítésben így néznek ki:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (3.119)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (3.120)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (3.121)$$

$$\nabla \mathbf{E} = 0 \quad (3.122)$$

Ezeket még kiegészítjük az Ohm-törvény mozgó közegekben érvényes (3.9) alakjával:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.123)$$

A (3.123) és (3.119) egyenleteket felhasználva a (3.120) *indukciós egyenlet* \mathbf{B} -re vonatkozó autonóm evolúciós egyenletté alakul, melyet a magnetohidrodinamika első alapegyenletének is neveznek:

$$\partial_t \mathbf{B} = \underbrace{\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}_{\text{advektív vagy indukción tag}} - \underbrace{\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})}_{\text{diffúzió tag}} \quad (3.124)$$

Itt $\eta = 1/\sigma\mu_0$ az ún. *turbulens mágneses diffuzivitás*, mely tehát az $1/\sigma$ *rezisztivitással* arányos. Valóban: $\eta = \text{const.}$ esetén az utolsó tag a $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$ azonosság felhasználásával $+\eta \nabla^2 \mathbf{B}$ alakot ölt, így sztatikus ($\mathbf{v} \equiv 0$) homogén közegben az indukciós egyenlet a mágneses térre vonatkozó diffúziós egyenletbe megy át, ahol η játssza a diffuzivitás szerepét.

Ha a plazma vezetőképessége végtelen, akkor $\eta = 0$: ilyenkor *ideális* MHD-ről beszélünk. Az $\eta \neq 0$ eset a *rezisztív* MHD. Ideális plazmában (3.124) szerint a mágneses tér csupán a fluidum áramlása következtében változik: (3.124) jobb oldalának első tagja tehát valóban az advektív tag.

A 3.2. szakaszban tárgyaltakhoz hasonlóan az indukciós egyenletre is elvégezhető az egyes tagok nagyságrendi becslése:

$$\underbrace{\partial_t \mathbf{B}}_{B/\tau} = \underbrace{\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}_{vB/l} - \underbrace{\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})}_{\eta B/l^2} \quad (3.125)$$

A jobboldal egyes tagjaihoz tartozó jellemző időskálák: a már ismert l/v advektív vagy dinamikai időskála, ill. a

$$\tau_\eta = l^2/\eta \quad (3.126)$$

rezisztív időskála. A jobb oldal két tagja (illetve a megfelelő időskálák) arányát jellemző dimenziótlan szám itt a

$$\text{Re}_m = lv/\eta \quad (3.127)$$

mágneses Reynolds-szám. Egy másik gyakran előforduló dimenziótlan szám viszont a (3.126) rezisztív és a (3.47) viszkózus időskálák aránya, a

$$\text{Pr}_m = \text{Re}_m/\text{Re} = \nu/\eta \quad (3.128)$$

mágneses Prandtl-szám.

A BEFAGYÁS TÉTELE A (3.124) indukciós egyenletet az ideális MHD esetben az (III.7) vektorszámítási azonosság segítségével így írhatjuk:

$$\partial_t \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} (\nabla \mathbf{B}) - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} (\nabla \mathbf{v}) \quad (3.129)$$

A jobb oldal második tagja (3.121) szerint eltűnik, így a Lagrange-derivált (3.25) kifejezését felhasználva

$$D_t \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} (\nabla \mathbf{v}) \quad (3.130)$$

A vektorokat a mágneses térrel párhuzamos és merőleges összetevőkre bontva az egyenlet párhuzamos komponense ($B_{\parallel} = B$)

$$D_t B = B \partial_{\parallel} v_{\parallel} - B \nabla \mathbf{v} = -B \nabla_{\perp} \mathbf{v}_{\perp} \quad (3.131)$$

Tekintsünk most egy infinitezimális, hasáb alakú fluidumelemet, melynek tengelye a mágneses térrel párhuzamos, magassága dl , alapterülete dA ; tömege tehát $dm = \rho dA dl$. Vezessük be a

$$\rho_l = \frac{dm}{dl} = \rho dA \quad (3.132)$$

vonalmonti sűrűséget, mely tehát tömeg/hosszúság (kg/m) dimenziójú. A háromdimenziós sűrűség (3.31)

$$D_t \rho = -\rho \nabla \mathbf{v} \quad (3.133)$$

kontinuitási egyenletével analóg módon a ρ_l egydimenziós sűrűség nyilván a

$$D_t \rho_l = -\rho_l \nabla_{\parallel} v_{\parallel} \quad (3.134)$$

kontinuitási egyenletnek tesz eleget. Az utóbbi két egyenletből parciális deriválással

$$D_t \left(\frac{\rho_l}{\rho} \right) = \left(\frac{\rho_l}{\rho} \right) (\nabla \mathbf{v} - \partial_{\parallel} v_{\parallel}) = \left(\frac{\rho_l}{\rho} \right) \nabla_{\perp} v_{\perp} \quad (3.135)$$

A (3.131) és (3.135) egyenletek alapján viszont parciális deriválással azonnal következik, hogy a fluidumelemünkön áthaladó $d\Phi = B dA = B\rho_l/\rho$ mágneses fluxus állandó: $D_t d\Phi = 0$. Ez az összefüggés véges fluidumdarabra is integrálható:

$$D_t \Phi = 0 \quad (3.136)$$

vagyis **ideális fluidumban a fluidumelemek mozgása során a rajtuk áthaladó mágneses fluxus** (tehát az őket metsző erővonalak mennyisége) **nem változik**. Az erővonalak tehát “be vannak fagyva” a mozgó plazmába.

Felmerülhet a kérdés, vajon a fluxus állandósága feltétlenül azt jelenti-e, hogy a mozgó fluidumelemen mindig *ugyanazok* az erővonalak haladnak át? Vegyük észre, hogy ez a kérdés értelmetlen: a mágneses térben definiálható végtelen sok erővonal közül egyet azonosítani, “megjelölni” éppen csak a rajta található anyag segítségével lehet.

MÁGNESES ERŐK Vezető fluidum esetén a (3.43) mozgásegyenletben fellépő $\rho \mathbf{f}$ külső erő elektromágneses erőt is tartalmaz. Egyetlen q töltésre ez az elektrosztatikus és a Lorentz-erő összege, $q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. A plazma térfogategységére így

$$\rho \mathbf{f} = \sum_i n_i q_i \mathbf{E} + \sum_i n_i q_i v_i \times \mathbf{B} \equiv \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.137)$$

erő hat, hiszen a magnetohidrodinamika egyik alapfeltevése szerint a közeg kvázineutrális. A $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ Lorentz-erővel kiegészített mozgásegyenletet szokták olykor “a magnetohidrodinamika második alapegyenletének” nevezni:

$$\rho D_t \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} + \nabla \hat{\tau} \quad (3.138)$$

A Lorentz-erő két tagra bontható:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} \underset{(3.119)}{\equiv} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} / \mu_0 \underset{(\text{III.10}), (3.121)}{\equiv} -\nabla \frac{B^2}{2\mu_0} + \nabla(\mathbf{B} \circ \mathbf{B} / \mu_0) \quad (3.139)$$

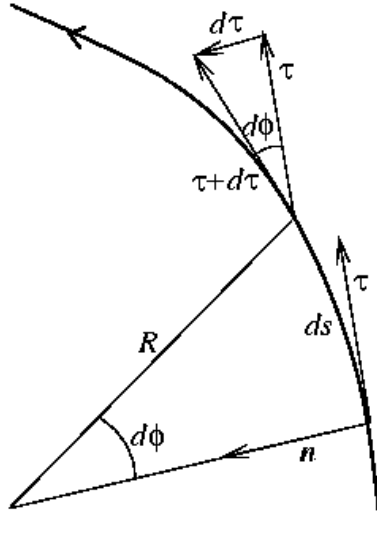
A jobb oldal első tagja alakilag (3.43) nyomásgradiens tagjához hasonlít, ezért $B^2/2\mu_0$ neve: *mágneses nyomás*. Látjuk, hogy a mágneses nyomás számszerűen megegyezik a mágneses tér energiasűrűségével. Ez érthető, hiszen a mágnesezett plazma összenyomásakor a befagyás miatt a mágneses teret is össze kell nyomnunk: ezt a többletmunkát végezzük a mágneses nyomás ellenében.

A (3.139) egyenlet utolsó tagja viszont (3.43) utolsó tagjával, a viszkózus feszültségtenzor divergenciájával analóg, ezért $\mathbf{B} \circ \mathbf{B} / \mu_0$ -t *mágneses (vagy Maxwell-) feszültségtenzornak* nevezzük.

A mágneses nyomás (illetve tágabban a mágneses erők) és a termikus nyomás relatív jelentőségét jellemző dimenziótlan paraméter a

$$\beta_{\text{pl}} = 2\mu_0 P / B^2 \quad (3.140)$$

plazma béta. Mivel (1.110) szerint a nyomás nagyságrendileg a belső energiasűrűséggel egyezik meg, a plazma béta egyben a mágneses és termikus energiák arányát is jellemzi. Kis plazma bétájú közeg (pl. a napkorona) hőállapotát tehát a mágneses tér határozza meg.



15. ábra: Görbült mágneses erővonal geometriáját jellemző mennyiségek

Bontsuk tovább (3.139) utolsó tagját a mágneses térrel párhuzamos és arra merőleges összetevőkre! Vezessük be ehhez a $\vec{\tau}$ mágneses tér irányú egységvektort, valamint az \mathbf{n} egységvektort, amely az adott pontban az erővonalhoz simuló kör középpontjába mutat. A 21. ábra alapján az erővonal mentén kicsiny ds ívhossznyt elmozdulva $\vec{\tau}$ megváltozása

$$d\vec{\tau} = \mathbf{n} d\phi = \mathbf{n} ds/R \quad (3.141)$$

Eszerint a \mathbf{k} görbületi vektorra

$$\mathbf{k} \equiv \frac{\mathbf{n}}{R} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \quad (3.142)$$

A fentiek alapján a mágneses feszültségtenzor divergenciája

$$(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}/\mu_0 = b(\vec{\tau}\nabla)(B\vec{\tau})/\mu_0 = B\tau_j\partial_j(B\tau_i)/\mu_0 = B^2\tau_j\partial_j\tau_i/\mu_0 + \tau_i\tau_j\partial_jB/\mu_0 = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_t \quad (3.143)$$

ahol

$$\mathbf{F}_c = B^2\mathbf{k} = \frac{B^2}{\mu_0 R}\mathbf{n} \quad (3.144)$$

a görbületi erő, és

$$\mathbf{F}_t = \left(\vec{\tau}\nabla \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \vec{\tau} \quad (3.145)$$

a mágneses feszítőerő (mágneses tenzió). A görbületi erő tehát az erővonalakra merőleges irányú, és a görbületi középpontba mutat, azaz az erővonalak kiegyenesítésére törekszik. Nagysága fordítva arányos az R görbületi sugárral. A mágneses feszítőerő viszont éppen ellensúlyozza a mágneses nyomás gradienseinek térirányú komponensét.

MÁGNESES FLUXUSCSÖVEK

Rétegzett, nem mágnesezett plazmába ágyazott, környezetével nyomásegyensúlyban levő mágneses fluxuscsőre

$$\frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho T + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_0 T_0 \quad (3.146)$$

ahol a '0' index a környező közegben felvett értékekre utal. Eszerint a csőben a sűrűség általában eltér a környezőtől, így a csőben levő anyagra a nyomásgradiens és a nehézségi erő különbsége, vagyis a *felhajtóerő* nem nulla:

$$\mathbf{F}_b = (\rho - \rho_0)\mathbf{g} \quad (3.147)$$

hiszen a hidrosztatikai egyensúly alapján $dP/dz = P_0/H_P = \rho_0 g$. Ez utóbbi kifejezést és a (3.146) összefüggést felhasználva $T \sim T_0$ esetén a felhajtóerő nagyságrendileg

$$F_b \sim \frac{P - P_e}{H_P} \sim \frac{B^2}{2\mu_0 H_P} \quad (3.148)$$

Ha a fluxuscső a környező közeghez képest v_\perp sebességgel mozog a csőre merőleges irányban, akkor a cső körül a környezetben fellépő áramlás a Bernoulli-törvény szerint módosítja ott a nyomást. Ezért a nyomási és nehézségi erők fenti mérlege nem lesz helyes, amit formálisan egy további erő, a *közegellenállás* vagy aerodinamikai ellenállás képében vehetünk figyelembe. Nagy Reynolds-számok esetén a fellépő turbulencia miatt a d átmérőjű cső egységnyi térfogatú darabjának d/v_\perp idő alatt átadott impulzus nagyságrendileg megegyezik azzal a $\rho_0 v_\perp^2/d$ impulzussal, amit a környező, ρ_0 sűrűségű fluidum csőhöz képesti mozgása által a cső adott szakaszán átvinne:

$$F_a = C_D \rho_0 v_\perp^2/d \quad (3.149)$$

ahol C_D egység nagyságrendű faktor.

3.6 MAGNETOSZTIKA

3.7 FORGÓ FLUIDUMOK DINAMIKÁJÁNAK ELEMELI

3.8 LÖKÉSHULLÁMOK

4. PERTURBÁCIÓK FLUIDUMOKBAN

4.1 LINEÁRIS PERTURBÁCIÓK

LINEARIZÁCIÓ A fluidummechanika (3.30), (3.43), (3.56) alapegyenleteit tömör-szimbolikus jelöléssel így írhatjuk:

$$\mathbf{Y}\hat{A}^{(k)}\mathbf{Y} + \mathbf{B}^{(k)}\mathbf{Y} + C = 0 \quad k = 1..n \quad (4.1)$$

Itt

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \rho \\ \mathbf{v} \\ T \\ P \\ \dots \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$$

a függő változók n -dimenziós vektora, $A^{(k)}$ és $B^{(k)}$ lineáris (differenciál)operátorok, C pedig konstans vektor.

Legyen \mathbf{Y}_0 (4.1) egy stacionárius megoldása:

$$\mathbf{Y}_0\hat{A}^{(k)}\mathbf{Y}_0 + \mathbf{B}^{(k)}\mathbf{Y}_0 + C = 0 \quad (4.2)$$

Perturbáljuk meg kissé e megoldást:

$$Y_k = Y_{0,k} + Y'_k \quad |Y'_k/Y_{0,k}| \ll 1 \quad \forall_k$$

Ezt (4.1)-be visszaírva, (4.2)-t kivonva, és az Y' -ben másodrendű tagot Y' kicsinységére tekintettel elhanyagolva a probléma *lineáris perturbációs egyenletére* jutunk:

$$\mathbf{Y}'\hat{A}^{(k)}\mathbf{Y}_0 + (\mathbf{Y}_0\hat{A}^{(k)} + \mathbf{B}^{(k)})\mathbf{Y}' = 0 \quad (4.3)$$

\mathbf{Y}_0 stacionárius volta miatt az együtthatók időfüggetlenek, tehát időfüggés szempontjából ez állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet. A megoldás időfüggése eszerint exponenciális jellegű:

$$Y'_k(\mathbf{x}, t) = Y'_k(\mathbf{x}) \exp(i\omega t) \quad (4.4)$$

Ezt (4.3)-be visszaírva egy sajátérték-problémához jutunk, melyben a sajátérték szerepét ω , a sajátfüggvényét pedig a perturbáció $Y'_k(\mathbf{x})$ helyfüggése játssza. A megoldás időbeli viselkedése nyilván az $\omega = \omega_R + i\omega_I$ komplex frekvencia képzetes részétől függ:

- Ha $\omega_I > 0$, a megoldás stabil (a perturbáció lecseng).
- Ha $\omega_I < 0$: a megoldás instabil (a perturbáció exponenciálisan nő).

Másfelől

- Ha $\omega_R = 0$, a perturbáció amplitúdója az időben monoton változik.
- Ha $\omega_R \neq 0$, a perturbáció amplitúdója az időben oszcillál.

NORMÁL MÓDUSOK A (4.3) sajátérték-probléma sajátfüggvényei, a *normál módusok* a gyakorlatban mindig ortogonális függvényrendszert alkotnak, mely a folytonosan

differenciálható függvények körében többnyire teljes is (bár a teljesség sok esetben nem bizonyított). Ezek szerint tetszőleges helyfüggésű perturbáció felírható normál módusok szuperpozíciójaként.

A normál módusok alakjára nézve akkor tehetünk további megkötéseket, ha az \mathbf{Y}_0 alparamlás bizonyos térbeli szimmetriákkal rendelkezik, hiszen ekkor a perturbációs egyenlet az idő mellett egyes térkoordináták szempontjából is állandó együtthatóságnak tekinthető:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Homogén eset:} & Y_0 \neq f(\mathbf{x}) & Y'_k(\mathbf{x}) = Y'_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \\
 \text{Plánparallel eset:} & Y_0 = f(z) & Y'_k(\mathbf{x}) = Y'_k(z) \exp[i(k_x x + k_y y)] \\
 \text{Hengerszimmetrikus eset:} & Y_0 = f(a) \neq f(\phi, z) & Y'_k(\mathbf{x}) = Y'_k(a) \exp[i(m\phi + k_z z)] \\
 \text{Gömbszimmetrikus eset:} & Y_0 = f(r) \neq f(\theta, \phi) & Y'_k(\mathbf{x}) = Y'_k(r) Y_m^l(\theta, \phi)
 \end{array} \tag{4.5}$$

Itt Y_m^l az l -edfokú, m -edrendű gömbfüggvény.) A sajátfüggvények meghatározása után azok kifejezéseit a (4.3) lineáris perturbációs egyenletbe visszaírva általában egy algebrai egyenletet nyerünk ω -ra és \mathbf{k} -ra, az ún. *diszperziós relációt*.

STABILITÁSVIZSGÁLAT Reális fluidumokban perturbációk állandóan fellépnek, ha más okból nem, hát a fluidumot felépítő részecskék véletlen mozgásai miatt. Természetesen nagyobb perturbációk kisebb valószínűséggel alakulnak így ki, de nemzéró valószínűséggel bármekkora zavar kialakulhat.

Fentebb megállapítottuk, hogy minden perturbáció felírható normál módusok szuperpozíciójaként. Eszerint az áramlás *lineáris* stabilitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy egyetlen lineáris normál módus $-\omega_I$ növekedési rátája se legyen pozitív. A stabilitásnak *általában véve* azonban ez csak szükséges, de nem elégséges feltétele, hiszen nem zárható ki, hogy az elhanyagolt, \mathbf{Y}' -ben másodrendű tagok figyelembevételével más eredményre jutnánk, vagyis kicsiny, de véges amplitúdójú zavarok még növekedhetnek. Ezt a kérdést csak (általában numerikus) *nemlineáris stabilitásvizsgálattal* lehet tisztázni.*

A stabilitásvizsgálat során a linearizáció mellett (illetve attól függetlenül) más egyszerűsítéseket is gyakorta alkalmazunk. Két fontos esetet különböztethetünk itt meg.

(1) $\tau_{\text{dyn}} \ll \tau_{\text{th}}$ eset

Ekkor az áramlás dinamikai időskálája sokkal rövidebb a diffuzív skáláknál, melyek közül a legrövidebb a kicsiny Prandtl-számok miatt az asztrofizikában rendszerint a termikus időskála. Ez az eset valósul meg pl. a csillagok belsejében. Ekkor a perturbációk dinamikai időskálán való fejlődése szempontjából a diffuzív tagok szerepe jelentéktelen, így azokat első közelítésben elhanyagolhatjuk. (Tehát lényegében ideális fluidumot tekintünk.) Ez a *dinamikai* vagy *adiabatikus stabilitásvizsgálat*.

A diffuzív tagok a lineáris perturbációs egyenlethez kétféle járulékot adnak: a diffuzivitások perturbációit nem tartalmazó, és azt tartalmazó tagokat. Pl. a hővezetési egyenlet diffuzív tagja esetében

$$(\kappa \nabla^2 T)' = \underbrace{\kappa_0 \nabla^2 T'}_{\text{diffuzív tag}} + \underbrace{\kappa' \nabla^2 T_0}_{\text{vibrációs tag}}$$

(A forrástagok perturbációit – így a hőegyenletben ϵ' -t – szintén a vibrációs tagok közé számítjuk.) Az adiabaticus esetet ezek közül csak a diffuzív tagokkal kiegészítő elemzés

*Elvben az a lehetőség is fennáll, hogy a lineárisan instabil módusok nemlineárisan stabilizálódnak, azaz növekedésük egy kis véges amplitúdónál megáll. A gyakorlatban azonban ez nemigen fordul elő.

a *diffúzív stabilitásanalízis*, míg a minden tagot figyelembe vevő a *vibrációs stabilitásvizsgálat*.

Ha a rendszer dinamikailag stabil, akkor az átlagos dinamikai egyensúlytól a hosszabb időskálájú effektusok — a lineáris elméletben — nem tudják eltéríteni. A diffúzív és vibrációs instabilitások legfeljebb az egyensúly körüli, dinamikailag közömbös ($\omega_I = 0$) rezgések amplitúdójának szekuláris[†] növekedését okozhatják.

A diffúzív tagok egyféle diffúzivitás figyelembe vétele esetén mindig stabilizáló jellegűek (az egyensúly körüli rezgéseket csillapítják). Több, különböző nagyságú diffúzivitás összjátéka viszont már szekuláris amplitúdó-növekedést, tehát instabilitást is okozhat. Ezek az ún. *kettős diffúzív instabilitások* — egy példájuk a 4.6. szakaszban tárgyalandó szemikonvekció.

A vibrációs tag elnevezése a pulzáló változócsillagok elméletéből ered, ahol éppen ezek felelősek a pulzáció létrejöttéért (κ - ill. ϵ -mechanizmus). Ennek ellenére a pulzáló csillagok több tulajdonsága, így a periódusuk, már az adiabatikus elméletből is megkapható. Maga a pulzáció ugyanis a dinamikai időskálán zajlik, a vibrációs effektusok csupán az amplitúdó hosszú távú változását — a pulzáció gerjedését vagy lecsengését — határozzák meg.

Lehetségesek ugyanakkor olyan perturbációk is, melyek a dinamikai egyensúlyt nem bolygatják meg, csak a hőmérsékleteloszlást, így a zavar csak a termikus időskálán, a hőegyenlet által előírt módon fejlődik. Az e feltételezés mellett végzett analízis a *termikus stabilitásvizsgálat*, az ilyen zavarok okozta instabilitás pedig a *termikus instabilitás*.

Ennek nemcsak olyan esetben van létjogosultsága, ha a dinamikai időskála hosszú a termikushoz képest (pl. kiterjedt diffúz gázfelhőkben), de még az ellenkező esetben is előfordulhatnak dinamikailag stabil rendszerekben a termikus folyamatok által hajtott szekuláris instabilitások, melyek során a rendszer csupa dinamikai egyensúlyi állapotot át fejlődik. Az ilyen *szekuláris* termikus instabilitás ismert példái az óriáscsillagok fejlődése során fellépő *héliumvillámok*.

(2) $\tau_{\text{th}} \ll \tau_{\text{dyn}}$ eset

Ez az eset valósul meg általában diffúz közegekben (csillaglégkörök, csillagközi anyag), legalábbis kellően nagy méretű anyagcsomók (pl. óriás molekulafelhők, szoláris protuberanciák) esetében. Az ilyen közegek optikailag vékonyak, így hűlési idejük méretüktől független, míg az l/v dinamikai időskála a mérettel nő, tehát bizonyos mérethatár fölött a feltétel teljesül. A legrövidebb időskálájú viselkedést ekkor a *termikus stabilitásvizsgálat* mutatja meg, melynek során most a sűrűség állandónak, vehető, hiszen az azt — a kontinuitási egyenletnek megfelelően — megváltoztatni képes áramlások időskálája sokkal hosszabb a vizsgált termikus folyamatokénál.

A rövid időskálán stabil rendszer ugyanakkor a fentiekhez hasonlóan még mutathat szekuláris lineáris instabilitásokat — csak éppen most a dinamikai instabilitás lesz szekuláris jellegű. Az ilyen instabilitás csupa termikus egyensúlyi állapotot át alakulhat ki, tehát a szekuláris dinamikai perturbációk vizsgálatánál többnyire izoterm zavarokat kell tekintenünk.

HANGHULLÁMOK A fenti általános elvek legegyszerűbb alkalmazásaként vizsgáljuk végtelen, homogén gáz dinamikai stabilitását.

Végtelen, homogén, semleges, politrop gázt tekintünk. A politrop állapotegyenlet (3.50)

[†] Szekulárisnak a rendszer legrövidebb időskálájánál nagyságrendileg hosszabb skálájú folyamatokat nevezzük. (A latin *saeculum*, azaz emberöltő, évszázad szóból.)

differenciális alakja alapján a sűrűség és a nyomás Lagrange-perturbációinak összefüggése

$$\delta P = c_s^2 \delta \rho \quad (4.6)$$

ahol

$$c_s^2 = \Gamma \frac{P_0}{\rho_0} \quad (4.7)$$

Γ értéke ideális gázban a fent tárgyalt (1) esetben (adiabatikus perturbáció) $5/3$, a (2) esetben (izoterm perturbáció) pedig 1 .

Egy a mennyiség δa Lagrange- és a' Euler-perturbációinak összefüggése a lineáris elméletben a (3.24) összefüggést dt -vel szorozva

$$\delta a = a' + \vec{\xi} \nabla a_0 \quad (4.8)$$

ahol $\vec{\xi} = \mathbf{v} dt$ a fluidumelem (infinitesimalis) elmozdulásvektora. Homogén közegben ($\nabla a_0 = 0$) tehát (4.9) az Euler-perturbációkra is fennáll:

$$P' = c_s^2 \rho' \quad (4.9)$$

Mivel a kontinuitási és a mozgásegyenlet az alapállapotra triviális, perturbációjuk közvetlenül felírható:

$$\partial_t \rho' + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (4.10)$$

$$\partial_t(\rho_0 \mathbf{v}) = -\nabla P' \quad (4.11)$$

Vegyük most (4.11) divergenciáját, és az eredményt helyettesítsük be (4.10) idő szerinti deriváltjába. Így (4.9) felhasználásával ρ' kivételével minden változót kiküszöböltünk, és egy hullámegyenlethez jutunk:

$$\partial_t^2 \rho' = c_s^2 \nabla^2 \rho' \quad (4.12)$$

A megoldás:

$$\rho' \propto \exp[i(\omega t - \mathbf{kx})] \quad (4.13)$$

(Kicsiny perturbáció hullámszáma szükségképpen valós.) Ezt (4.36)-ba visszahelyettesítve a diszperziós reláció

$$\omega = \pm c_s k \quad (4.14)$$

tehát ω valós. A megoldás tehát állandó amplitúdójú hullámok, a *hanghullámok* vagy *akusztikus hullámok* alakjában állt elő. A hullámban a sűrűség periodikusan ingadozik, tehát a fluidumelemek összenyomódnak és kitágulnak. Az oszcilláció visszatérítő ereje a nyomásgradienstől származik.

A hullámok (4.7) fázissebessége (és egyben csoportsebessége), a c_s *hangsebesség* ideális gázban

$$c_s^2 = \Gamma \frac{\mathcal{R}}{\mu} T = \Gamma \frac{3k_B}{m_*} T = \Gamma v_*^2 \quad (4.15)$$

vagyis a gázban a hangsebesség nagyságrendileg a részecskék termikus sebességével egyezik meg. A (4.11) egyenlet jobb oldalába a (4.9) és (4.13) kifejezéseket behelyettesítve kitűnik, hogy a gyorsulás — s így integrálja, a fluidumelemek sebessége — mindig \mathbf{k} irányú. A hanghullámok tehát *longitudinális hullámok*.

4.2 TERMIKUS INSTABILITÁS HOMOGEN GÁZBAN

4.3 HIDROMÁGNESES HULLÁMOK

ALFVÉN-HULLÁMOK Tekintsünk most ideális plazmát z irányú konstans $\mathbf{B} \equiv B_0 \mathbf{e}_z$ mágneses térben. Korlátozzuk érdeklődésünket az inkompresszibilis perturbációkra, melyekre $\rho' = 0$ — így (4.9) szerint egyben $P' = 0$. Bár a nyomásperturbáció hajtotta hanghullámokat ezzel kiszűrtük, az alábbiakban megmutatjuk, hogy $\mathbf{B}_0 \neq 0$ esetén léteznek a perturbációs egyenleteknek nemtriviális megoldásai: az ún. *Alfvén-hullámok*.

A kontinuitási egyenlet (4.10) perturbációja $\rho' = 0$ esetén a

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (4.16)$$

inkompresszibilis alakra egyszerűsödik. A perturbációs egyenletek megoldását ismét

$$\mathbf{v} \propto \exp[i(\omega t - \mathbf{kx})] \quad (4.17)$$

alakban keresve, a (4.16) feltételbe való visszahelyettesítés a

$$\mathbf{k}\mathbf{v} = 0 \quad (4.18)$$

feltételre vezet. A keresett hullámok tehát *transzverzálisak*.

A mozgásegyenlet és az indukciós egyenlet lineáris perturbációi:

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}_0 / \mu_0 \quad (4.19)$$

$$\partial_t \mathbf{B}' = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) = (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{v} \quad (4.20)$$

A (4.19) egyenlet szerint a gyorsulás — és így annak integrálja, a sebesség is — merőleges a mágneses tér irányára, tehát $v_z = 0$. Eszerint **az Alfvén-hullámok rezgési síkja merőleges a \mathbf{k} és \mathbf{B}_0 vektorok kitüzte síkra**. Ha speciálisan \mathbf{k} és \mathbf{B}_0 párhuzamosak, vagyis a hullám éppen a mágneses térrel párhuzamosan terjed, akkor a polarizáció tetszőleges lehet.

Helyettesítsük be (4.19) időderiváltjába a (4.20) egyenletet! Az eredmény μ_0 -lal átszorozva:

$$\mu_0 \rho_0 \partial_t^2 \mathbf{v} = [\nabla \times (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{v}] \times \mathbf{B}_0 \stackrel{\text{(III.9)}}{=} (\mathbf{B}_0 \nabla)(\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{v} - [\nabla \circ B_0 d_z \mathbf{v}]_z B_0 \quad (4.21)$$

$$= B_0^2 d_z^2 \mathbf{v} - B_0^2 \nabla (d_z v_z) \quad (4.22)$$

Az utolsó tag $v_z \equiv 0$ folytán eltűnik, így végül is a

$$\partial_t^2 \mathbf{v} = v_A^2 d_z^2 \mathbf{v} \quad (4.23)$$

anizotrop hullámegyenletre jutunk, ahol

$$v_A = B_0 / (\mu_0 \rho_0)^{1/2} \quad (4.24)$$

az *Alfvén-sebesség*. A (4.17) próbamegoldást a (4.23) hullámegyenletbe helyettesítve a diszperziós reláció

$$\omega = v_A k_z = v_A k \cos \theta \quad (4.25)$$

16. ábra: Alfvén-hullámok terjedési diagramja

17. ábra: Magnetoakusztikus hullámok terjedési diagramja

ahol θ a z -tengellyel (a perturbálatlan mágneses tér irányával) bezárt szög. Az Alfvén-hullámok tehát anizotrop módon terjednek, és $c_A = \omega/k$ fázissebességük a mágneses térre merőlegesen zéró. (Ezt pongyola fogalmazásban úgy szokták mondani, hogy a hullámok “csak a mágneses tér mentén terjednek.”). Az ilyen anizotrop hullámok terjedési sebességének $c_A(\theta)$ irányfüggését egy polárdiagramon, az ún. *terjedési diagramon* szokás ábrázolni (16. ábra). A diagramon a görbe egy pontjának helyvektora $c_A(\theta)\mathbf{k}$.

Feladat: Számítsuk ki az Alfvén-hullámok $d\omega/d\mathbf{k}$ csoportsebességét! Milyen viszony van a csoport- és fázissebesség között? Rajzoljuk fel a terjedési diagramot a csoportsebességre is!

MAGNETOAKUSZTIKUS HULLÁMOK Ejtsük most el az inkompresszibilitás feltevését, s vizsgáljunk olyan perturbációkat, melyekre nem érvényes a $\mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{B}_0\mathbf{v} = 0$ feltétel! Az ilyen zavarokra $P' \neq 0$, vagyis fejlődésükben a mágneses erők mellett a nyomásgradiens is szerephez jut. Ezért ezeket *magnetoakusztikus hullámoknak* (olykor magnetoszonikus hullámoknak vagy mágneses hanghullámoknak) nevezik.

A $\theta = 0$ esetben a longitudinális hanghullámokban a fluidumelemek az erővonalak mentén mozognak, így mágneses perturbációk nem lépnek fel, s a hanghullámok terjedésére a mágneses tér nincs hatással. Ekkor tehát három lineáris független hullámmódus lehetséges: egy változatlan formában terjedő hanghullám, valamint két, egymásra merőlegesen polarizált Alfvén-hullám. (Utóbbiak $\pm\pi/2$ fáziseltolású szuperpozíciójával cirkulárisan polarizált Alfvén-hullám — más néven torziós Alfvén-hullám — is lehetséges.)

A $\theta = \pi/2$ esetben tisztán longitudinális hanghullámok hullámfrontjai az erővonalakkal párhuzamosak. Így az erővonalak alakja nem torzul el, és mágneses görbületi erő és tenzió nem lép fel. Ugyanakkor az erővonalak sűrűsége, vagyis térerősség a hullámban ingadozik, ezért a mágneses nyomás gradiense is szerepet kap az erőegyensúlyban. A visszatérítő erő így a termikus és a mágneses nyomás gradienseinek összege, a hullámok terjedési sebessége pedig nagyobb, mint a nem mágneses esetben: $c_f^2 = d(P + B^2/2\mu)/d\rho = c_s^2 + v_A^2$.

Az általános esetben, mivel várakozásunk szerint a módusok viselkedése θ függvényében folytonos, a $\mathbf{k}-\mathbf{B}_0$ síkban rezgő hullámmódusokra 17. ábrához hasonló terjedési diagramot várunk. Általában tehát két magnetoakusztikus hullámmódus lép fel: egy többé-kevésbé izotrop módon terjedő *gyors magnetoakusztikus hullám*, továbbá egy, a mágneses tér mentén terjedő *lassú magnetoakusztikus hullám*.

A $c_s > v_A$ esetben (nagy plazma béta) úgy tekinthetjük, hogy csak gyenge csatolás lépett fel az Alfvén és a hanghullámok között. A gyors hullám lényegében hanghullámnak tekinthető, melyet a mágneses tér kissé módosított; a lassú hullám ugyanakkor a nyomási erők által kissé befolyásolt Alfvén-hullámként is felfogható.

A $c_s < v_A$ esetben (kis plazma béta) ugyanakkor a csatolás nagyon erős, és a fenti analógia nem használható. A gyors módus pl. ilyenkor $\theta \rightarrow 0$ -ban egy transzverzális Alfvén-hullámba, $\theta \rightarrow \pi/2$ -ben viszont egy tisztán longitudinális módosult hanghullámba

megy át.

$c_s > v_A$ és $c_s < v_A$ közegek határán a gyors hullám gyors hullámba, a lassú lassúba megy át. Ennek során refrakciót szenvedhet.

4.4 JEANS-INSTABILITÁS

Tekintsük nyugvó homogén, semleges, kompresszibilis, öngravitáló fluidumot. Már fentebb a 3.4. szakaszban beláttuk, hogy az ilyen fluidum — mely a homogén világegyetem modelljeként is felfogható — nem lehet sztatikus egyensúlyi állapotban, hanem összehúzódnia vagy tágulnia kell. Ennek ellenére tegyük most fel, hogy fluidumunk nyugalomban van (ezt az önkényes, szigorúan véve helytelen alapfeltevést “Jeans-svindlinek” is szokás nevezni).*

Szokás szerint tekintsük a kontinuitási egyenletet és a mozgásegyenletet lineáris perturbációját:

$$\partial_t \rho' + \rho_0 \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (4.26)$$

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v} = -c_s^2 \nabla \rho' - \rho_0 \nabla U' \quad \nabla U' = 4\pi G \rho' \quad (4.27)$$

A már megszokott $\exp(i\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})$ alakú próbamegoldást visszahelyettesítve ebből az

$$\omega^2 = c_s^2(k^2 - k_J^2) \quad (4.28)$$

diszperziós relációra jutunk, ahol

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2} \quad (4.29)$$

A k_J hullámszámnak megfelelő hullámhossz az ún. *Jeans-hossz*:

$$\lambda_J = 2\pi/k_J = c_s \sqrt{\pi/G\rho_0} \quad (4.30)$$

A Jeans-hosszal megegyező átmérőjű fluidomgömb tömege pedig a *Jeans-tömeg*:

$$\mathcal{M}_J = \frac{4}{3}\pi \lambda_J^3 \rho_0 = \frac{4}{3}\pi^{5/2} \left(\frac{k_B T}{G m_*} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho_0^{1/2}} \quad (4.31)$$

A (4.28) reláció azt mutatja, hogy a Jeans-hossznál kisebb léptékű ($k > k_J$) perturbációk viselkedése oszcillatorikus (ω valós), tehát ezek a zavarok kissé módosult hanghullámmokként terjednek a közegben. A Jeans-hosszat meghaladó méretű ill. a Jeans-hossznál nagyobb tömegű ($k < k_J$) sűrűsödéseket ill. ritkulásokat viszont öngravitációjuk megállíthatatlanul összehúzza ill. kitágítja, így időbeli fejlődésük monoton jellegű, s a rendszernek az egyensúlytól való exponenciális eltávolodását, instabilitását jelentik. Ez a *Jeans-instabilitás*, amely diffúz asztrofizikai közegekben a struktúraképződés (pl. a csillagkeletkezés és a galaxisképződés) fő oka.

*Az e szakaszban a Jeans-svindli segítségével levezetett eredmények egzaktabbá tehetők, ha a számítást táguló Hubble-áramlásban, vagy sztatikus de véges kiterjedésű felhő kicsiny, homogénnek tekinthető részében, ill. esetleg kétdimenziós, végtelen homogén síkban megismételjük, ezekben az esetekben ugyanis az alapállapot valóban stacionárius.

4.5 HANGHULLÁMOK RÉTEGZETT KÖZEGBEN

AKUSZTIKUS LEVÁGÁS A homogén közegekben fellépő kicsiny zavarok vizsgálatát terjesszük most ki a legegyszerűbb inhomogén esetre: a 3.3. szakaszban vizsgált *rétegzett közegekre*. Plánparallel atmoszférát tekintünk tehát, ahol a perturbálatlan, egyensúlyi állapotban a közeg jellemzői a z magasság függvényei, a nehézségi gyorsulás pedig $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ (\mathbf{e}_z a z irányú egységvektor).

Az alábbi, illusztratív jellegű tárgyaláshoz szorítkozzunk a 4.1. szakaszban tárgyalt (2) esetre, azaz vizsgáljuk izoterm zavarok viselkedését izoterm atmoszférában ($\Gamma_0 = \Gamma = 1$). Mivel ekkor (4.7) szerint $P_0 = c_s^2 \rho_0$, c_s^2 pedig állandó, a (4.6) relációt a (4.8) összefüggésbe helyettesítve az Euler-perturbációk kapcsolata továbbra is

$$P' = c_s^2 \rho' \quad (4.32)$$

Így a (3.84) hidrosztatikai egyensúly figyelembe vételével a homogén gázra felírt (4.9)–(4.11) lineáris perturbációs egyenletek a következőképpen általánosodnak:

$$\partial_t \rho' + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (4.33)$$

$$\partial_t(\rho_0 \mathbf{v}) = -\nabla P' + \rho' \mathbf{g} \quad (4.34)$$

$$P' = c_s^2 \rho' \quad c_s^2 = \Gamma \frac{P_0}{\rho_0} \quad (4.35)$$

A 4.1. szakasz végén, a homogén közegben terjedő hanghullámok tárgyalásánál használt eljárást követve vegyük most (4.34) divergenciáját, és az eredményt helyettesítsük be (4.33) idő szerinti deriváltjába. Így (4.35) felhasználásával az alábbi módosított hullámegyenletet kapjuk:

$$\partial_t^2 \rho' = c_s^2 \nabla^2 \rho' - \mathbf{g} \nabla \rho' \quad (4.36)$$

A megoldást most

$$\rho' \propto \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - K z)] \quad (4.37)$$

alakban kereshetjük, ahol k_x és k_y szimmetria okokból valós.

Visszahelyettesítéssel a következő diszperziós relációhoz jutunk:

$$\omega^2 = c_s^2(k_h^2 + K^2) + i2\omega_{ac} c_s K \quad (4.38)$$

ahol k_h a hullámszám vízszintes komponense ($k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$),

$$\omega_{ac} = \frac{g}{2c_s} = \frac{c_s}{2H_P} \quad (4.39)$$

H_P pedig a (3.85) nyomási skálamagasság. Ez a diszperziós reláció másodrendű algebrai egyenlet K -ra. Megoldása:

$$K = i\kappa_z + k_z \quad \kappa_z = -\frac{\omega_{ac}}{c_s} \quad k_z^2 = (\omega^2 - \omega_{ac}^2)/c_s^2 - k_h^2 \quad (4.40)$$

Ebből

$$\omega^2 = \omega_{ac}^2 + c_s^2 k^2 \quad (4.41)$$

18. ábra: Rétegzett közegben terjedő hullámok számára megengedett területek a k_h - ω síkon. Az áttekinthetőség kedvéért az $\omega_{ac} > \omega_{BY}$ esetet ábrázoltuk; ellenkező esetben a különböző hullámtípusok tartományai átfedhetik egymást.

19. ábra: Hanghullám terjedése egy csillag belsejében, geometriai akusztikai ábrázolásban.

($k^2 = k_h^2 + k_z^2$). Terjedő hullámok ($k_z^2 > 0$) esetén tehát $\omega > \omega_{ac}$. Ha $\omega < \omega_{ac}$, akkor K -nak nincs valós része, így a perturbáció viselkedése a z szerint nem periodikus, nem hullám-szerű; ehelyett amplitúdója a hullámforrástól távolodva exponenciálisan lecseng. (Úgy is szokták mondani: a hullám *evaneszcens*, vagyis elenyészik.) **Rétegzett közegben tehát ω_{ac} -nél alacsonyabb frekvenciájú hanghullámok nem terjednek.** ω_{ac} elnevezése ezért: *akusztikus levágási frekvencia*. A jelenség könnyen megérthető, ha meggondoljuk, hogy definíciójából következően ω_{ac} nagyságrendileg a hanghullámok (nyomáshullámok) egy skálamagasságon való áthaladási idejének reciprokával egyezik meg. Eszerint ennél hosszabb időskálájú zavar (pl. a közeget alulról vagy felülről határoló merev lap lassú fel-le mozgása) esetén a közegnek bőségesen van ideje hidrosztatikai egyensúlyi állapotát a körülményekhez igazítani, a megváltozott nyomási erőket a nehézségi erővel kiegyensúlyozva. Így az $\omega \rightarrow 0$ határesetben a közeg csupa hidrosztatikai egyensúlyi állapotban fejlődik. (A homogén esetben erre nem volt lehetőség, hiszen ott a nyomási erőket ellensúlyozó más erő nem lép fel.)

A nem izoterm közeg általánosabb esetében a tárgyalás jóval bonyolultabb, de lényegében megerősíti a fenti következtetést, s az akusztikus levágási frekvencia általános kifejezését

$$\omega_{ac}^2 = \frac{c_s^2}{4H_\rho^2} \left(1 - 2 \frac{dH_\rho}{dz} \right) \quad (4.42)$$

alakban adja meg, ahol H_ρ a sűrűség skálamagassága.

Feladat: Mennyi lesz a (4.42) képlet zárójeles faktorának értéke izentropikus atmoszférában?

Nemzéró k_h vízszintes hullámszám esetén a levágás feltétele általában még szigorúbb. Az (4.41) diszperziós reláció alapján k_z^2 csak akkor pozitív, ha a frekvencia meghaladja az

$$\omega_{ac,eff} = (\omega_{ac}^2 + c_s^2 k_h^2)^{1/2} \quad (4.43)$$

értéket — nevezzük ezt *effektív akusztikus levágási frekvenciának*. Hanghullámok tehát csupán a 18. ábrán sáfrányzölddel jelölt (k_h, ω) értékpárokra felelnek meg.

p -MÓDUSOK, HELIOSZEIZMOLÓGIA

Ha a közeg nem szigorúan izoterm, ω_{ac} és c_s függ z -től. Így rögzített ω frekvenciára és a k_h vízszintes hullámszámra (4.41) alapján a rétegzett közegben a hullámvektor k_z függőleges összetevője függ z -től. Terjedése során tehát a hullám *refrakciót* (törést) szenved, iránya változik. (Folytonosan rétegzett közeg esetén folytonosan, két homogén közeg határán ugrásszerűen.)

A csillagok belsejében a hőmérséklet, s így a vele arányos hangsebesség, befelé nő. Ezért fix k_h mellett ω_{ac} kifelé, $c_s k_h$ pedig befelé nő. Adott ω frekvenciájú és k_h vízszintes

hullámszámú hanghullám számára megengedett tartomány tehát felülről és alulról is korlátos. A két határ között a hullám, mint egy hullámterelőben, terjed, a határokról pedig visszaverődik. Mivel $\omega = \omega_{ac,eff}$ esetén $k_z = 0$, a tartomány alsó határához ($\omega \simeq c_s k_h$) közelítve a terjedési irány a vízszinteshez közelít, s a határon a hullám visszafordul. A felső határnál $\omega \simeq \omega_{ac}$, így $k \simeq 0$: a hullám élesen verődik vissza (19. ábra).

Az alsó visszaaverődés helye függ attól is, milyen a hullám terjedési iránya adott magasságban (pl. a felső visszaverődés után). A felső visszaverődés magassága viszont csak ω -tól függ. Az evanescens tartományban a hullám amplitúdója gyorsan lecseng, ezért a csillagok légkörében csupán az akusztikus levágási frekvencia felszín közelében felvett értékéhez hasonló periódusú (a Nap esetében 5 perc körüli) oszcillációk figyelhetők meg.

Többszöri visszaverődéssel a hullám az egész csillagot sokszorosan körbeutazhatja, s önmagával interferenciába lépve állóhullámmá alakulhat. Ez az interferencia csak meghatározott diszkrét $\omega - k_h - k_{z0}$ együtteseknél erősítő jellegű, ezért a csillagban jelentős amplitúdóval csak ezen diszkrét oszcillációs módusok fellépte várható. Mivel a most tárgyalt hanghullámok visszatérítő ereje a nyomásgradiens, a csillagok ezen normál módusait *p-módusoknak* nevezzük.

4.6 NEHÉZSÉGI HULLÁMOK ÉS KONVEKTÍV INSTABILITÁS

NEHÉZSÉGI HULLÁMOK Fentebb, a rétegzett közegben terjedő hanghullámok diszperziós relációjának levezetése során érdeklődésünket az izoterm közegben terjedő izoterm hullámokra korlátoztuk. Ha viszont a közeg és a hullámok politrop indexe eltér, a közegben a hanghullámok mellett újfajta hullámok is fellépnek, melyek visszatérítő ereje a *felhajtóerő*.

A perturbációs egyenletek ezen megoldásainak vizsgálatához tegyük fel, hogy a keresett perturbációk viselkedése eleget tesz a

$$\nabla(\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (4.44)$$

összefüggésnek. Ez a kontinuitási egyenlet (3.38) anelasztikus alakjának lineáris perturbációja. Mint láttuk, az anelasztikus közelítés kiszűri a már ismert hanghullámokat.

A forrásmentes megoldások kereséséhez most képezzük a linearizált, perturbált mozgásegyenlet *rotációját* a divergenciája helyett:*

$$\partial_t[\nabla \times (\rho_0 \mathbf{v})] = \nabla \rho' \times \mathbf{g} = \rho_0 \nabla(\rho'/\rho_0) \times \mathbf{g} - \underbrace{\rho' \nabla(1/\rho_0) \times \mathbf{g}}_{=0 \text{ (párh. vektorok)}} \quad (4.45)$$

A továbblépéshez szükségünk lesz az állapotegyenletre is, melyet a (3.55) Boussinesq-közelítésben írunk fel. E közelítés érvényességének kérdésére a következő szakaszban fogunk visszatérni. A közelítés a potenciális hőmérséklettel kifejezve, a $\tilde{\Theta} = \Theta'/\Theta_0$ rövidítés bevezetésével:

$$\rho'/\rho_0 = -\delta_P \tilde{\Theta} \quad (4.46)$$

*A vektoranalízis egy ismert tétele szerint ha egy végtelenben eltűnő vektortérre $\nabla \mathbf{B} \equiv 0$ és $\nabla \times \mathbf{B} \equiv 0$, akkor $\mathbf{B} \equiv 0$, tehát a rotációképzéssel megoldást nem vehetünk.

Ezzel (4.45) a

$$\partial_t[\nabla \times (\rho_0 \mathbf{v})] = \delta_P \rho_0 \nabla \tilde{\Theta} \times \mathbf{g} \quad (4.47)$$

alakot ölti. Ismételt rotációképzéssel, és az előjelet megfordítva:

$$\begin{aligned} -\partial_t \nabla \underbrace{[\nabla(\rho_0 \mathbf{v})]}_{=0 \text{ (4.44)}} + \partial_t \nabla^2(\rho_0 \mathbf{v}) = & \delta_P \rho_0 g \partial_z \nabla \tilde{\Theta} + \delta_P \rho_0 (\nabla^2 \tilde{\Theta}) \mathbf{g} \\ & - \underbrace{\left[\delta_P (\mathbf{g} \nabla \rho_0) \nabla \tilde{\Theta} - \delta_P (\nabla \rho_0) (\nabla \tilde{\Theta}) \mathbf{g} \right]}_{\perp \mathbf{e}_z} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Levezetés: A bal oldal itt az (III.8) azonosság segítségével adódott. A jobb oldal viszont az (III.6) vektorszámítási azonosság felhasználásával kapható meg, figyelembe véve, hogy $g_i = -g \delta_{i3}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\rho_0 \nabla \tilde{\Theta} \times \mathbf{g})|_i = & -\epsilon_{ijk} \partial_j (\rho_0 \epsilon_{klm} \partial_l \tilde{\Theta} g \delta_{m3}) = -(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (\rho_0 \partial_l \tilde{\Theta} g \delta_{m3}) = \\ & -\rho_0 g \partial_z \partial_i \tilde{\Theta} - \rho_0 g_i \partial_j^2 \tilde{\Theta} - (d_z \rho_0) (\partial_i \tilde{\Theta}) g + (\partial_j \rho_0) (\partial_j \tilde{\Theta}) g_i \end{aligned}$$

A $w = \rho_0 v_z$ és a $\nabla_h^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ jelöléseket bevezetve (4.48) z -komponense

$$\partial_t \nabla^2 w = -g \delta_P \rho_0 \nabla_h^2 \tilde{\Theta} \quad (4.49)$$

Adiabatikus perturbációk esetén a fluidumelemek entrópiája, és azzal egyértelmű kapcsolatban álló potenciális hőmérséklete sem változhat: $D_t \Theta = 0$, azaz lineáris közelítésben $\partial_t \Theta' + v_z d_z \Theta_0 = 0$. Ezt Θ_0 -lal átosztva:

$$\partial_t \tilde{\Theta} = -\frac{w}{\rho_0 \Theta_0} d_z \Theta_0 \quad (4.50)$$

Végül (4.49) idő szerint deriváltjába behelyettesítve a (4.50) egyenletet, egy egyváltozós egyenletet kapunk w -re:

$$\partial_t^2 \nabla^2 w = \omega_{\text{BV}}^2 \nabla_h^2 w \quad (4.51)$$

ahol

$$\omega_{\text{BV}}^2 = \delta_P \frac{g}{\Theta_0} \frac{d\Theta_0}{dz} = (\nabla_{\text{ad}} - \nabla) \delta_P \frac{g}{H_P} \quad (4.52)$$

az ún. *Brunt–Väisälä-frekvencia*. Itt

$$\nabla = \frac{P_0}{T_0} \frac{dT_0}{dP_0} \quad (4.53)$$

az asztrofizikában széles körben elterjedt jelölés, mely nem tévesztendő össze a nabla operátorral.

A megoldást szokás szerint

$$w \propto \exp[i(\omega t - \mathbf{kx})] \quad (4.54)$$

alakban keressük. Visszahelyettesítéssel a diszperziós reláció

$$\omega^2 k^2 = \omega_{\text{BV}}^2 k_h^2$$

avagy

$$\omega = \omega_{\text{BV}} k_h / k = \omega_{\text{BV}} \cos \theta \quad (4.55)$$

ahol θ a hullámszámvektor vízszintessel bezárt szöge. Léteznek tehát nemtriviális forrásmentes megoldások. Mivel a nyomási tag a (4.45) mozgásegyenletből már az első rotációképzéssel eliminálódott, e rezgések visszatérítő ereje a nehézségi erő, ezért nevük: *nehézségi hullámok*.

A hullám működési mechanizmusa a következő. A (4.45) egyenletben fellépő visszatérítő erő pontosabban a differenciális nehézségi erő vagy *felhajtóerő*. Az eredeti helyéről elmozdult fluidumelem és környezete között a Boussinesq-közelítés szerint mindenkor nyomásegyensúly van. Az adiabatikus állapotváltozással új nyomást felvett elem és környezete között azonban általában sűrűségkülönbség lép fel. (4.52) szerint ez visszatérítő jellegű — tehát oszcillációhoz, és így hullámmozgáshoz vezet —, ha $\nabla < \nabla_{\text{ad}}$. Ez a feltétel könnyen érthető, hiszen ha a közeg perturbálatlan hőmérséklete a nyomással lassabban nő, mint adiabatikus állapotváltozás esetén, akkor a lefelé elmozdult elemek melegebbek (a fölfelé elmozdultak hidegebbek) lesznek környezetüknél, ez pedig a (3.52) Boussinesq-közelítésben az átlagnál kisebb (nagyobb) sűrűséget, s így az elemet visszatérítő irányú felhajtóerőt jelent. Ennek folytán az elem egyensúlyi helyzete körül oszcillálni fog, s a rezgés hullámként terjed tovább.

Minthogy $\cos \theta \leq 1$, (4.55) értelmében **a nehézségi hullámok csak a Brunt–Väisälä-frekvenciánál alacsonyabb frekvenciával terjednek**. A k_h - ω -diagramon tehát a 18. ábrán jelölt tartományt népesítik be.

Látható továbbá, hogy $k_h = 0$ esetén $\omega = 0$, vagyis **a nehézségi hullámok vízszintes irányban terjednek**. Ugyanakkor terjedési irányuk a függőlegeshez képest tetszőlegesen kicsiny, de véges szöget is bezárhat.

KONVEKTÍV INSTABILITÁS A (4.52) Brunt–Väisälä-frekvencia képzetessé válik, ha a közegben a potenciális hőmérséklet, vagyis a fajlagos entrópia kifelé csökken. Ez a feltétel több alternatív alakban is felírható:

$$\frac{dS}{dz} < 0 \quad \text{azaz} \quad \nabla > \nabla_{\text{ad}} \quad \text{azaz} \quad \frac{dT}{dP} > \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s \quad (4.56)$$

Ekkor a (4.54) normál módusok viselkedése nem oszcillatorikus, tehát nehézségi hullámok nem terjednek (evaneszcensek). Ugyanakkor minden \mathbf{k} hullámszámra található exponenciálisan növekvő és csökkenő megoldás is (hiszen $\omega = \pm i\omega_{\text{BV}}k_h/k$), tehát dinamikai instabilitás lép fel. Az instabilitás mechanizmusa a hullámok hatásmechanizmusával azonos, csak most fordított előjellel. Ha $\nabla > \nabla_{\text{ad}}$, a közeg perturbálatlan hőmérséklete a nyomással gyorsabban nő, mint adiabatikus állapotváltozás esetén. Így a lefelé elmozdult elemek hidegebbek (a fölfelé elmozdultak melegebbek) lesznek környezetüknél, ez pedig a (3.52) Boussinesq-közelítésben az átlagnál nagyobb (kisebb) sűrűséget, s így az elemet egyensúlyi helyzetétől még jobban eltávolító felhajtóerőt jelent. Az így keltett fel- és leszálló konvektív mozgások miatt az instabilitást *termikus konvektív instabilitásnak* szokás nevezni. Az instabilitás fenti (4.56) feltétele a *Schwarzschild-kritérium*.

A Schwarzschild-kritérium teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a rétegződés *szuperadiabatikus*; ellenkező esetben *szubadiabatikus*. Ha $\nabla \simeq \nabla_{\text{ad}}$, (*kvázi*)*adiabatikus* rétegződésről beszélünk.

(3.52) szerint az instabilitás feltétele az alábbi alternatív alakban is felírható:

$$\frac{d\rho}{dP} < \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \quad (4.57)$$

Ez a *Ledoux-kritérium*.

A Ledoux-kritérium csak az eddig vizsgált kémiailag homogén esetben ekvivalens a Schwarzschild-félével. Előfordulhat azonban, hogy a közegben kémiai inhomogenitás van jelen. A csillagok belsejében pl. gyakori eset, hogy a hélium koncentrációja a hidrogénfúzió következtében befelé nő. Ekkor az ideális gázok állapotegyenletében fellépő μ átlagos molekulásúly többé nem csak a nyomás és a hőmérséklet (Saha-egyenletből meghatározható) $\mu(P, T)$ függvénye, tehát a $\rho = \rho(P, T, \mu)$ állapotegyenlet nem írható $\rho(P, T)$ alakba. Így az állapotegyenlet (1.22) differenciális alakja általánosan

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\delta_P \frac{dT}{T} + \delta_T \frac{dP}{P} + \delta_{PT} \frac{d\mu}{\mu} \quad (4.58)$$

A Boussinesq-közelítés tehát a fentiek helyett

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\delta_P \frac{T'}{T} + \delta_{PT} \frac{\mu'}{\mu} \quad (4.59)$$

A kritériumok fizikai értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy a dinamikai instabilitás alapvetőbb, általánosabb érvényű feltétele a Ledoux-kritérium, hiszen ez közvetlenül az instabilitásért felelős felhajtóerőt okozó sűrűségkülönbségekre utal. A (4.58) alakot dP/P -vel osztva, és bevezetve a

$$\nabla_\mu = \frac{P}{\mu} \frac{d\mu}{dP} \quad \nabla_{\mu, \text{ad}} = \frac{P}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{S, \{c_i\}}$$

jelöléseket:

$$\frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dP} = -\delta_P \nabla + \delta_T + \delta_{PT} \nabla_\mu$$

Ebből a bal oldal adiabatikus (azaz állandó entrópia és kémiai összetétel melletti) értékét levonva, a Ledoux-kritérium bal oldala arányos a

$$\delta_P (\nabla_{\text{ad}} - \nabla) + \delta_{PT} (\nabla_\mu - \nabla_{\mu, \text{ad}})$$

kifejezéssel. A Ledoux-kritérium tehát ilyen formában is írható:

$$\nabla - \nabla_{\text{ad}} > (\delta_{PT}/\delta_P) (\nabla_\mu - \nabla_{\mu, \text{ad}}) \quad (4.60)$$

Ideális gázban parciális ionizáció hiányában a jobb oldal ∇_μ -vel egyezik meg.

Ha a közeg a Ledoux-kritérium szerint stabil, de a Schwarzschild-kritérium szerint instabil, akkor a felszálló (leszálló) elemek szuperadiabatikus hőmérsékletgradiensből eredő, sűrűségecsökkenését (növekedését) a nagyobb (kisebb) nehézelem-tartalom túlkompensálja. Így az elem oszcillálni kezd az egyensúlyi állapot körül. A dinamikainál jóval hosszabb, diffúzív időskálán azonban az oszcilláció amplitúdója változik. A gyakorlatban a hődiffuzivitás mindig jelentősen meghaladja a kémiait (hiszen hőt a fluidumelem környezetével nemcsak részecskék átadása révén, de részecskeüt-közésekkel és sugárzással is cserélhet). Ezért a destabilizáló hatású hőmérsékletfluktuációt a diffúzió erősebben csökkenti, mint a stabilizáló hatású kémiai fluktuációt. Ennek hatására a visszatérítő erő — s így a rezgés amplitúdója — periódusról periódusra kicsit nő. Ez egy, a dinamikai időskálánál sokkal hosszabb termodiffúzív időskálán fellépő, oszcillatorikus instabilitáshoz vezet.

Ez a jelenség az asztrofizikában *szemikonvekció* néven ismert. A fellépő mozgások jellege és amplitúdója az instabilitás nemlineáris fázisában ma még nem ismeretes. A szemikonvekció kezelése a csillagfejlődési elméletek egyik fő bizonytalansági tényezője. Főként korai típusú csillagok esetében jelent fontos problémát, mivel itt a konvektív magot övező szemikonvektív zónában zajló keveredés ütemétől függhet, mennyi időt tölt a csillag a fősorozaton. (Minél nagyobb a hatékonyan kevert mag, annál tovább elegendő üzemanyagot szolgáltat a centrális égési folyamatoknak).

A szemikonvekció fordítottja, ha a közeg Ledoux-instabil, de Schwarzschild-stabil. Az ekkor-fellépő dinamikai instabilitást tehát a kompozíciós gradiens hajtja (nehezebb anyag van felül). Az asztrofizikában ez az eset kevésbé jelentős (esetleg szoros kettősöknél léphet fel, tömegátadás után).

20. ábra: Nehézségi hullám terjedése a Nap belsejében.

A geofizikában viszont fontos alkalmazásai vannak. Ilyenek a felül melegebb, de sósabb tengervízben kifejlődő ún. *sóujjak*. De a Föld folyékony külső magjában zajló konvektív mozgások is kompozíciós konvektív eredetűek.

Feladat: A nehézségi hullámok diszperziós relációjának fenti levezetésében (3.55) helyett a (4.59) általánosabb alakot használva mutassuk meg, hogy a dinamikai instabilitás feltétele valóban a (4.60) Ledoux-kritérium!

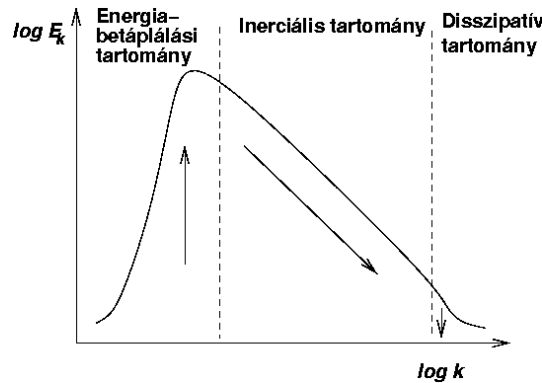
***g*-MÓDUSOK** A fázissebesség irányát (4.55) szerint adott k_h mellett a frekvencia határozza meg. Minél közelebb van a frekvencia ω_{BV} -hez, annál közelebb áll a terjedési irány a vízszinteshez. Mivel az égitestek belsejében a Brunt-Väisälä-frekvencia a mélységgel változik, a nehézségi hullámok esetében is fellép a refrakció és reflexió jelensége. A hanghullámok esetéhez hasonlóan a reflektálódó hullámok a gömb alakú égitestben körbejárva önmagukkal interferálnak, ami diszkrét hullámszám-frekvencia értékpároknál állóhullámok kialakulásához vezet: ezek a *g*-módusok.

A Naphoz hasonló, hűvösebb csillagok belsejében ω_{BV} a centrumtól távolodva csökken, míg nem a konvektív zóna alján eltűnik. Ezért véges ω frekvenciájú nehézségi hullám csak azon r_* sugáron belül terjedhet, ahol $\omega_{BV}(r_*) = \omega$, ezen kívül pedig evanescens lesz. A centrumtól távolodva (4.55) értelmében a terjedési irány a függőlegessel egyre nagyobb szöget zár be, míg végül r_* -nál vízszintessé válik, és bekövetkezik a reflexió (20. ábra). A *p*-módusok esetével ellentétben tehát az ilyen csillagokban a *g*-módusok amplitúdója a centrumban a legnagyobb. Ezért az ezeken alapuló szeizmológiai vizsgálatoknak nagy jelentősége lehet a Nap magjának részletesebb vizsgálata szempontjából. Sajnos azonban, mivel ezek az evanescens módusok csak igen kicsiny amplitúdóval szüremlenek ki a fotoszférába, a detektálásukra irányuló törekvések mindeddig nem jártak sikerrel.

A forróbb, korai típusú csillagokban viszont ω_{BV} a felszíntől befelé haladva csökken, így itt a *g*-módusok a *p*-módusokhoz hasonlóan nagy amplitúdót érhetnek el a légkörben. Az ilyen nagy amplitúdójú *g*-módusú oszcillációk természetesen mindig *nemradiális* pulzációt jelentenek a (4.44) feltétel folytán. Ilyen *g*-módusú nemradiális pulzációkat azonosítottak már pl. több fehér törpecsillag légkörében (*ZZ Cet* típusú változócsillagok).

4.7 TURBULENCIA

NYÍRÁSI INSTABILITÁS ÉS TURBULENS KASZKÁD Leegyszerűsített, de a lényegét mégis jól megragadó megfogalmazásban a turbulenciát az ún. nyíróáramlási instabilitások következményének tekinthetjük. Az ilyen instabilitások a nyírástól áramlások (amelyekben a $(?)$ nyírási tenzornak nem minden eleme tűnik el, azaz a sebességnek önmaga irányára merőleges irányban vett parciális deriváltja nem zéró) igen széles osztályára jellemzőek. Az instabil módusok a nemlineáris tartományban örvényekké fejlődnek, melyek jellemző léptéke az eredeti áramlásban fellépő nyírást L léptéke. Az instabilitás L/V időskálán fejlődik, ahol V az elnyírt rétegek közötti jellemző sebességkülönbség. Az



21. ábra: Statistikailag stacionárius turbulencia vázlatos energiaspektruma

instabilitás feltétele, hogy a $Re = LV/\nu$ Reynolds-szám (ν a viszkozitás) egy kritikus értéket meghaladjon.

Elég magas Reynolds-szám esetén az instabilitásban képződő örvények maguk is nyírás-instabilak, így örvények egész hierarchiája fejlődhet ki, amelyben minden egyes szintnek megvan a maga l léptéke és v jellemző sebessége. A legkisebb örvények méretét az a feltétel szabja meg, hogy lv/ν effektív Reynolds-számuk a kritikus értékkel egyezik meg, így ők már stabilak. Az egyes szintek örvényei energiájukat az eggyel magasabb szintűekéből merítik az instabilitás révén; így a legnagyobb, L léptéken betáplált energia zuhataghoz (kaskádhoz) hasonlóan egyre több, egyre kisebb örvény energiájává alakul át, míg a legkisebb örvények léptékén (viszkózus lépték) viszkózusan eldisszipál.

Hangsúlyozandó, hogy a fenti vázlatos kép oly mértékben leegyszerűsíti a valóságot, hogy szinte már hazug: a turbulenciához vezető instabilitássorozat sokkal bonyolultabb a fenti leírásnál, s részletei az áramlás típusától függően változnak. A turbulencia eredetének ez a klasszikus fenomenologikus képe mégis érvényesnek fogható fel, mint a különféle áramlásokban ténylegesen végbemenő folyamatok “közös nevezője”. Mint ilyen, független a nagyléptékű áramlást létrehozó mechanizmustól, vagyis a kisebb léptékű turbulencia esetében univerzálisan érvényes, akár pl. turbulens konvekcióról, akár véletlenszerű kényszer okozta mozgásról van szó. Ugyanakkor tudatában kell lennünk annak, hogy ez a kép elsiklik a turbulencia olyan lényeges vonásai fölött, mint az intermittencia és a koherens struktúrák (ld. alább).

Matematikai megfogalmazásban az “örvények” hierarchiáját az áramlási tér Fourier-felbontásával foghatjuk meg. A független változó szerepét l -től ekkor a $k \sim 1/l$ hullámszám veszi át. Az áramlás teljes kinetikus energiáját az egyes hierarchiaszintek járulékainak összege vagy integrálja adja: $E = \int E_k dk$.

A fenti kaskád-kép azon az implicit feltevésen nyugszik, hogy az energiaátadás a hullámszám-térben *lokális*: minden örvény csak a nála egy szinttel feljebb levőktől kap energiát. Ha a (nagy) energiabetáplálási lépték sok nagyságrenddel meghaladja a (kis) viszkózus léptéket, akkor azt várhatjuk, hogy a módusok közötti ilyen lokális energiatranszfer nem “érzékeli” sem a nagyléptékű, az áramlást hajtó folyamatokat, sem a kis léptékeken ható viszkozitást, így dinamikáját csak a mozgásegyenlet $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ inerciális tagja szabja meg. Ebben a köztes *inerciális tartományban* tehát az E_k energiaspektrum alakja nem függhet semmilyen előre megadott léptéktől: skálafüggetlen lesz, azaz hatványfüggvény. A hierar-

chia egy “szintjének” ekkor a hullámszámokban egy dekád (vagy más, logaritmikus skálán konstans szélességű tartomány) felel meg, hiszen az örvényhierarchia önhasonló. Az adott szintű örvények kinetikus energiája tehát $v^2/2 = \int_{k/10}^k E_k dk \sim kE_k$.

A KOLMOGOROV–SPEKTRUM Stacionárius állapotban, amikor az energiabetáplálás pótolja a disszipációt, az inerciális tartományban, ahol sem a betáplálás, sem a disszipáció nem jelentős, a kis k hullámszámoktól a nagyok felé tartó spektrális energiaátadási ráta nem függ k -tól (és megegyezik a disszipációs rátával):

$$\epsilon \equiv v^2/2\tau = \text{const.} \quad (4.61)$$

ahol τ a transzfer időskálája. A fent körvonalazott kép szerint a transzfert a nagyobb örvények nyírás instabilitása okozza, így időskálája ezen instabilitások növekedési rátájához köthető: $\tau \sim l/v \sim (vk)^{-1}$. Ezt (4.61)-be helyettesítve $v \sim \epsilon^{1/3}k^{-1/3}$, vagy

$$E_k \sim \epsilon^{2/3}k^{-5/3}, \quad (4.62)$$

Ez a nevezetes Kolmogorov-spektrum. A kísérletek és megfigyelések számtalan esetben igazolták a Kolmogorov-spektrum felléptét semleges fluidumok turbulens áramlásában.

MHD TURBULENCIA Iroshnikov (1964) és Kraichnan (1965) rámutattak arra, hogy a $\tau \sim l/v$ összefüggés vezető fluidumban nem szükségképpen teljesül. v -t meghaladó Alfvén-sebességű mágneses tér jelenlétében a turbulens fluktuációk Alfvén-hullámcsomagokként fognak viselkedni, melyek az erővonalak mentén az Alfvén-sebességgel mozognak. (Ez az ún. Alfvén-effektus.) Ennek még akkor is így kell lennie, ha nagyléptékű mágneses tér nincs is jelen, ugyanis a kisléptékű dinamómechanizmus (ld. alább a 7.3.1. szakaszt) által keltett turbulens mágneses tér amplitúdója a legnagyobb léptékeken minden reálisan elképzelhető spektrálkitevő mellett elég nagy ahhoz, hogy a kisebb léptékű mozgásokat uralja. Iroshnikov és Kraichnan úgy okoskodtak, hogy két l méretű, szembetalálkozó hullámcsomag $\tau_i = l/v_A \ll l/v$ ideig hat kölcsön, s e rövid idő alatt csak egy kevés, mondjuk δE , energiát tud egyik a másiknak átadni. Ahhoz, hogy egy hullámcsomag energiája az ilyen véletlen energiafelvételek és -leadások során számottevően megváltozzon $(E/\delta E)^2 = (v_A/v)^2$ darab ilyen kölcsönhatás kell. Ha most τ_i -t ezzel a számmal megszorozzuk, $\tau \sim (E/\delta E)^2 \tau_i = (v_A/v)(l/v)$, ahol a v_A Alfvén-sebességet a legnagyobb léptékű mágneses tér határozza meg, így az l -től független lesz. Ha ezt behelyettesítjük (4.61)-be, az eredmény $v \sim (\epsilon v_A)^{1/4} k^{-1/4}$, azaz

$$E_k \sim (\epsilon v_A)^{1/2} k^{-3/2}, \quad (4.63)$$

Ezt nevezik Iroshnikov–Kraichnan-féle (IK-) energiaspektrumnak. Megjegyzendő, hogy $\epsilon = \text{const.}$ k -független kinetikus energiáttranszfert jelent, holott az MHD esetben nem a kinetikus, hanem a teljes (kinetikus + mágneses) energia az, ami megmarad.

Az utóbbi években kétségek merültek fel az IK-skálatörvény helyességét illetően MHD turbulenciában. Elméleti oldalról Goldreich & Sridhar (1995) felfedeztek néhány hibát az eredeti Iroshnikov–Kraichnan-féle gondolatmenetben a hullámcsomag-kölcsönhatás egyszerűsített kezelésében. Ezeket a kételyeket megerősítik Muller & Biskamp (1999) numerikus szimulációi, akik IK-spektrum helyett hagyományos Kolmogorov-spektrumot találtak elenyésző keresztelicitású 3D MHD turbulenciában. Mivel a két spektrálkitevő számszerű értéke (1.5 ill. 1.66) elég közeli, empirikus adatok (megfigyelések vagy kísérletek) alapján nem könnyű a kérdést egyértelműen eldönteni. Még az is meglehet, hogy a hullámszámtérbeli energiaátadás nemlokális jellege miatt a valódi energiaspektrum nem is egészen hatványtörvény).

AZ INVERZ KASZKÁD Mint láttuk, a turbulens kaszkádban az energia általában a kis léptékek felé “zubog”. Ez rendszerint a többi ideális invariánsra is igaz. Ha viszont két megmaradó

mennyiség spektruma nem teljesen független egymástól, ez meggátolhatja egyidejű párhuzamos kaszkádjukat, így az egyiknek a nagy léptékek felé kell zúdulni. Ezt nevezzük *inverz kaszkádnak*.

Legyen egy H megmaradó mennyiség H_k spektruma E_k -hoz kötve, a $H_k = h(k)k^n E_k$ összefüggés szerint, ahol $h(k)$ alulról vagy felülről (esetleg mindkétfelől) korlátos. Konkrét példaképpen tekinthetjük a $H = \mathbf{A}\mathbf{B}$ mágneses helicitást, ahol \mathbf{A} a vektorpotenciál, \mathbf{B} a mágneses térerősség. Ez 3D ideális MHD turbulenciában megmarad. E mennyiségre $n = -1$, és a $h(k)$ relatív helicitás felülről korlátos. (4.61)-et figyelembe véve H ϵ -ra normált spektrális árama

$$kH_k/\epsilon\tau = h(k)k^n \quad (4.64)$$

Ez az áram gond nélkül konstans lehet, ha $n < 0$ és $h(k)$ alulról korlátos, vagy ha $n > 0$ és $h(k)$ felülről korlátos. (Ez utóbbi a helyzet az $\mathbf{u}\nabla \times \mathbf{u}$ kinetikus helicitással, ami a 3D ideális hidrodinamikai turbulencia invariánsa). Ha viszont $n < 0$ és $h(k)$ felülről korlátos, mint a mágneses helicitás esetében, akkor a (4.64) kifejezés nyilván nem lehet állandó: nagy Reynolds-számok határesetében a betáplálási léptéken “bepumpált” H -nak csak elenyészően kis hányada disszipálhat el a kis léptékeken. A betáplált mágneses helicitás túlnyomó része tehát csakis a kis k hullámszámok felé zúdulhat. 3D MHD turbulenciában tehát a mágneses helicitás inverz kaszkádot szenved. Éppen ez az inverz kaszkád felelős a nagyléptékű dinamóhatásért.

Végül ha $n > 0$ és $h(k)$ alulról korlátos, akkor (4.64)-ből k -val *növekvő* spektrális áram következne az adott mennyiségre nézve, ami stacionárius állapotban nyilván képtelenség, hiszen az inerciális tartományban betáplálás nem történik. Ebben a helyzetben az energia és a H -val jelölt mennyiség megmaradása csak úgy teljesülhet egyidejűleg, ha az inerciális tartományban $\epsilon \neq \text{const.}$; ehelyett ϵ -nak k -val oly módon kell csökkennie, hogy H -nak állandó spektráláramú direkt kaszkádjá legyen. Az előző esettel analóg módon így most az *energia* mutat inverz kaszkádot. Ez az eset a 2D hidrodinamikai turbulenciában valósul meg, ahol a $(\nabla \times \mathbf{u})^2/2$ enstrofia ideális invariáns, spektruma pedig egyszerűen $k^2 E_k$, ebben az esetben tehát $n = 2$ és $h(k) \equiv 1$.

KOHERENS STRUKTÚRÁK ÉS INTERMITTENCIA A ma talán legerjedtebb turbulenciaelméleti monográfia, Lesieur (1987) műve három kritériumot javasol, ami alapján egy áramlás turbulensnek minősül:

- (1) Véletlenszerűség
- (2) Nagyságrendi növekedés a makroszkopikus transzportban, különösen az impulzusében*
- (3) Különböző léptékű mozgások jelen több nagyságrendet átfogó, folytonos mérettartományban.

Az izotrop turbulencia fenti fenomenologikus képe alapján elképzelt áramlások eleget tesznek e feltételeknek. De a feltételek a véletlenszerű áramlások sokkal szélesebb osztályát engedik meg: valójában a természetben vagy a laboratóriumban előforduló legtöbb turbulens áramlás, noha eleget tesz e definíciós kritériumoknak, egészen másként fest, mint azt naivan elképzelnénk. Elsősorban a *koherens struktúrák* és a *belső intermittencia* törvényszerű felbukkanása ötlük szembe.

A koherens struktúrák a turbulenciát hajtó instabilitás normál módusaira emlékeztető képződmények. Klasszikus példájuk a turbulens keveredő rétegben látható Kelvin–Helmholtz-szerű örvények. A meglepő bennük az, hogy még a teljesen kifejlett turbulencia tartományában is jelen vannak, s meglepően hosszú ideig fennmaradnak. Az egyes koherens struktúrák viselkedése nem determinisztikus, helyük, méretük különböző időpontokban és az áramlás különböző realizációiban más és más. A koherens struktúrák léte és jellemzőik a turbulencia spektrálmélete alapján nem látható előre, ugyanis e struktúrák az egyes Fourier-módusok fázisainak nem véletlenszerű szuperpozíciójából adódnak, az E_k teljesítményspektrum pedig a fázisra nézve nem tartalmaz információt.

A “belső intermittencia” kifejezés arra a tényre utal, hogy a disszipációs ráta az áramlásban nem egyenletesen oszlik el. Ehelyett a disszipáció a fluidum térfogatának egy intermittens részhalmazára korlátozódik. Ezt néha kissé ködösen úgy fogalmazzák meg, hogy az áramlás “nem mindenütt turbulens”, amivel arra akarnak utalni, hogy a legkisebb (disszipatív) léptékekig lenyúló energiakaszkád a

*A makroszkopikus transzportegyütthatók értéke turbulens áramlásban $\sim LV$ (vö. 7.4. szakasz). Az impulzusáram nagyságrendi növekedése tehát azt jelenti, hogy $\text{Re} \equiv LV/\nu \gg 1$

térnek csak egy (fraktál) részhalmazára korlátozódik. A belső intermittencia a struktúrafüggvények alakját és a spektrálkitevőket is módosítja, főként a magasabb rendű korrelációk esetében.

4.8 KEVEREDÉSIHOSSZ-ELMÉLET

MÓDOSULT CSILLAGSZERKEZETI EGYENLETEK A 3.3. szakaszban a csillag-szerkezeti egyenleteket azzal a feltevéssel vezettük le, hogy a csillagban nincsenek belső mozgások ($\mathbf{v} \equiv 0$). Termikus konvektív instabilitás azonban szinte minden csillag valamely rétegében fellép, és ez belső mozgásokhoz, az energiatranszporthoz hozzájáruló konvektív áramlásokhoz vezet. Meg kell tehát vizsgálnunk, hogyan számítható ki a csillagok szerkezete konvekció esetén.

Ehhez feltételezzük, hogy a csillag *átlagosan* továbbra is gömbszimmetrikus (tehát nem mágneses és nem forog), sztatikus egyensúlyi állapotban van, és a benne zajló turbulens mozgások csupán véletlen fluktuációk ezen átlagos egyensúlyi állapot körül. Tetszőleges a fizikai mennyiséget egy \bar{a} időátlag és egy a' fluktuáció összegére felbontva képezzük most a (3.30), (3.43) és (3.63) fluidummechanikai alapegyenletek átlagát. Az átlagolt egyenletekben a parciális időderiváltas tag értelemszerűen zéró lesz, a hely szerinti deriváltakban pedig a gömbszimmetriát kihasználva a gradiens- ill. a divergencia-operátort

$$\nabla a = d_r a \quad \text{ill.} \quad \nabla(\mathbf{a}) = (1/r^2)d_r(r^2 a_r) \quad (4.65)$$

kifejezésekkel helyettesíthetjük.

A kontinuitás így pl.

$$\nabla \bar{\rho \mathbf{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_r \overline{\rho r^2 \mathbf{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\rho r^2 \mathbf{v}} = \text{const.}$$

alakú lesz. Mivel szimmetriakokból a középpontban nem lehet radiális tömegáram, a konstans szükségképpen nulla:

$$\overline{\rho r^2 \mathbf{v}} = 0, \quad (4.66)$$

ami egyszerűen annyit jelent, hogy az r sugarú gömb — r^2 -tel arányos — felületén ki- és beáramló tömeg átlagosan nulla, vagyis a csillag nem tágul és nem zsugorodik.

A mozgásegyenlet és a (3.63) teljes energiaegyenlet átlaga ugyanígy

$$\nabla (P\hat{\delta} + \overline{\rho \mathbf{v} \circ \mathbf{v}}) = \bar{\rho} \mathbf{g} + \nabla \bar{\tau} \quad (4.67)$$

$$\nabla \left[\frac{1}{2} \overline{\rho v^2 \mathbf{v}} + \overline{\rho H \mathbf{v}} + \overline{F_r} \right] - \overline{\mathbf{v} \hat{\tau}} = \rho \epsilon_N \quad (4.68)$$

Az asztrofizikában a Reynolds-számok a nagy térbeli méretek miatt mindig óriásiak, ezért, mint egyszerű nagyságrendi becsléssel kimutatható, a viszkózus tagok a fenti egyenletekben elhanyagolhatók.

A hely szerinti deriváltat (4.65) szerint kifejezve (4.67) a

$$\frac{d(P + P_t)}{dr} = -G \frac{\mathcal{M}(r)}{r^2} \bar{\rho} \quad (4.69)$$

alakot ölti. Itt, akárcsak korábban a folyó tömeg definíciója

$$\frac{d\mathcal{M}}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (4.70)$$

A (4.69) hidrosztatikai egyensúlyi egyenlet bal oldalán viszont a (3.98) alakhoz képest most megjelent egy új tag, a

$$P_t = \overline{\rho v_r^2} \quad \text{turbulens nyomás.}$$

Mivel (4.15) értelmében $P \sim \rho c_s^2$, ebből következően a turbulens és termikus nyomás aránya $P_t/P \sim v^2/c_s^2 = M^2$. Az M Mach-szám a csillagokban zajló konvekció esetében többnyire kicsiny, így a turbulens nyomás hatása általában nem jelentős: a szubszonikus konvekció a csillag hidrosztatikus egyensúlyát csak kicsiny mértékben zavarja meg.

A (4.68) egyenlet viszont (4.65) felhasználásával ismét a sugárzásegyensúlyi egyenlet szokásos alakját ölti:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon_{\text{Nu}} \quad (4.71)$$

Az $L(r)$ folyó luminozitás kapcsolata a teljes energiafluxussal a korábbiakhoz hasonlóan most is $L = 4\pi r^2 j_E^{(T)}$. Az energiaáram most három járulékból tevődik össze:

$$j_E^{(T)} = j_E + j_c + j_k$$

melyek a következők:

$$\begin{aligned} j_E & \text{ sugárzási energiafluxus — vö. (3.5)} \\ j_c = \overline{\rho H v_r} = \overline{\rho H' v_r} & \text{ konvektív entalpiafluxus} \\ j_k = \frac{1}{2} \overline{\rho v^2 v_r} & \text{ kinetikus energiafluxus} \end{aligned}$$

Definíciójukból látható, hogy j_c és j_k a mozgó fluidumelemek által advektált belső energia ill. kinetikus energia. (A tágulási munka miatt a belső energia helyett az entalpia az a mennyiség, ami a mozgó tömegelem ténylegesen magával vihet.)

A (4.69)–(4.71) egyenletek — a jelentéktelen turbulens nyomástól eltekintve — megegyeznek a korábban kapott (3.98)–(3.100) egyenletekkel. Lényeges különbséget jelent azonban, hogy a hőmérséklet helyfüggését leíró (3.101) egyenlet — mely (3.5) átrendezése — alakja most

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{\rho c_P \kappa} \left[\frac{L(r)}{4\pi r^2} - j_c - j_k \right] \quad (4.72)$$

hiszen ez az összefüggés csak a sugárzásos energiaáramot kapcsolja össze a hőmérsékletgradienssel, míg most az energiaáramnak egyéb járulécai is vannak.

A konvektív energiaáram fellépte a negyedik csillagszerkezeti egyenletben szükségessé teszi egy olyan elmélet kidolgozását, mellyel ez a további tag kiszámítható. Az asztrofizikai konvekció az inhomogén, turbulens közegekben fellépő turbulens transzport problémájának speciális esete, így a leírására használt módszerek is a turbulens transzport modellezésére használt eljárások alkalmazásai. Legegyszerűbb, és ezért az asztrofizikában legszélesebb körben használt közülük az ún. *keveredéshossz-elmélet*.

ALAPFELTEVÉSEK
tesszük.

A probléma egyszerűsítése érdekében az alábbi feltevéseket

1. $Re \gg 1$.

Már a (4.69)–(4.72) csillagszerkezeti egyenletek levezetése során kihasználtuk, hogy a Reynolds-szám nagy, így az átlagolt fluidummechanikai egyenletekben fellépő viszkózus tagok elhanyagolhatók.

2. $M \ll 1$

A kis Mach-számú, erősen szubszonikus turbulencia nyomása, mint fentebb mondtuk, elhanyagolható a termikus nyomás mellett. Feltevésünk további következménye (ld. IV. függelék), hogy a relatív sűrűségperturbáció kicsiny: $\rho'/\rho \ll 1$

3. *A turbulencia anizotropiája nem túl erős*, azaz a közegben a vízszintes és függőleges áramlási sebességek, ill. a vízszintes és függőleges skálahosszok között nincs nagyságrendi különbség.

4. $l \ll H_P$: a turbulencia korrelációs hossza kicsiny a nyomási skálamagassághoz (és általában az átlagos mennyiségek skálahosszához) képest. Mivel l az előző szakasz szerint nemcsak a turbulens fluidumelemek méretét, hanem átlagos élettartamuk alatt megtett útjukat is jellemzi, ez az ún. “lokális” vagy “vékony réteg” közelítés két további, döntő egyszerűsítést tesz lehetővé.

- $j_k \ll j_c$, vagyis a kinetikus energiaáram ebben a közelítésben elhanyagolható, hiszen az egy adott szinten fel- ill. lefelé áthaladó fluidumelemek l kicsinysége miatt lényegében ugyanolyan környezetből érkeznek, így az “előéletük” ugyanolyan, s így mozgási energiájuk is ugyanakkora.
- $P'/P \ll T'/T \sim \rho'/\rho$, vagyis alkalmazható a Boussinesq-közelítés (ld. IV. függelék). A termodinamikai mennyiségek fluktuációi közötti összefüggésekben (amelyek alakilag a teljes differenciálok 1.1. szakaszban felírt relációival egyeznek meg) így a P' nyomásfluktuáció elhagyható.

P_t és j_k elhanyagolása miatt az egyetlen kiszámítandó mennyiség tehát a j_c konvektív entalpiafluxus. Felhasználva, hogy az entalpiafluktuáció (1.24) kifejezésében a jobb oldal második tagja a Boussinesq-közelítésben elhanyagolható, $H' = \rho c_P T'$. Ezzel j_c fenti definíciója így írható tovább:

$$j_c = \overline{\rho H' v_r} = \overline{c_p \rho v_r T'} + \overline{c_p \rho' v_r T'} = C_{vT} \overline{c_p} \overline{\rho} w \theta + \mathcal{O}(\rho'/\rho) \quad (4.73)$$

ahol w és θ a függőleges sebesség és a hőmérsékletfluktuáció r.m.s. értékei:

$$w^2 = \overline{v_r^2} \quad \theta^2 = \overline{T'^2}$$

C_{vT} pedig egy korrelációs együttható, melyet egyelőre szabad paraméterként kezelünk.

A (4.73) kifejezés szerint tehát a jobb oldal kicsiny utolsó tagját elhagyva a konvektív energiaáram kiszámításához w és θ , vagyis a turbulens sebesség és hőmérsékletfluktuációk jellemző értékére van szükség.

ALAPKÉPLETEK A turbulens amplitúdók kiszámítása a keveredési-hossz-elméletben két igen egyszerű nagyságrendi összefüggés alapján történik.

A fluidumelemre ható felhajtó az elem környezete és az elem súlyának különbsége, a térfogategységre vetítve $-\rho'g$. A Boussinesq-közelítés (3.52) kifejezését felhasználva ez $\delta_P(T'/T)\rho g \sim \delta_P \rho g \theta / T$ -vel egyenlő. Az elem élettartama alatt méretének megfelelő l

utat tesz meg. A felhajtóerőt az úttal megszorozva megkapjuk a feljatóerő által végzett munkát, ami az elem kinetikus energiájával egyezik meg:

$$\delta_P \theta \rho g l \sim \frac{1}{2} \rho w^2$$

Egyszerűsítve, átrendezve, és az egységnyi nagyságrendű C_w faktort bevezetve:

$$\boxed{w^2 = C_w \delta_P g l \frac{\theta}{T}} \quad (4.74)$$

Vagyis: a turbulens elemekben a tipikus hőmérsékletfluktuáció értéke már meghatározza a rájuk ható felhajtóerőt, s ezen keresztül az elért sebességüket.

A hőmérsékletfluktuáció viszont annak a következménye, hogy az egyensúlyi helyzetből elmozdult elemben az állapotváltozás közel adiabatikus, míg a környező plazma $T(P)$ átlagos rétegződése ha kis mértékben is, de szuperadiabatikus. A Boussinesq-közelítés értelmében a nyomásfluktuáció elhanyagolható, vagyis a fluidumelem nyomása mindig megegyezik a környezetével. Mivel a lokális közelítés szerint $l \ll H_P$, a fluidumelemek elmozdulási tartományán belül a nyomásváltozás az eredeti helyükön mért nyomáshoz képest

$$\Delta P \simeq \frac{dP}{dr} \Delta r = \frac{\Delta r}{H_P} P \ll P.$$

Ekkor az elemben és környezetében mért hőmérséklet eltérése az elem eredeti helyén mért értéktől a Taylor sorfejtések első tagjával közelíthető, így azok különbsége, vagyis a hőmérsékletfluktuáció (1.18) ill. (4.53) felhasználásával

$$T' \simeq \left[\frac{dT}{dP} - \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s \right] \Delta P \simeq (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \frac{\Delta r}{H_P} T.$$

Az elmozdulás során átlagosan $\Delta r \sim l$ így — a fentiekhez hasonlóan bevezetve egy egységnyi nagyságrendű C_T faktort — θ -ra a

$$\boxed{\frac{\theta}{T} = C_T (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \frac{l}{H_P}} \quad (4.75)$$

összefüggés adódik.

A (4.74) és (4.75) algebrai relációk a keveredéshossz-elmélet alapösszefüggései. Ezeket a kiszámítandó konvektív fluxus (4.73) kifejezésébe helyettesítve:

$$j_c = C_{vT} C_v^{1/2} C_T^{3/2} l^2 (\delta_P g / H_P^3)^{1/2} C_p \rho T (\nabla - \nabla_{\text{ad}})^{3/2} \quad (4.76)$$

Bár ez a kifejezés számos szabad paramétert tartalmaz, azok csupán a $C_{vT} C_v^{1/2} C_T^{3/2} l^2$ (hosszúság)² dimenziójú kombinációban fordulnak elő, ahol a C -k egységnyi nagyságrendű faktorok. Ezért célszerű l -et a fenti kombináció négyzetgyökeként *újrdefiniálni*, így ez az egyetlen, *keveredési hossz*nak nevezett paraméter “magába nyelte” a probléma összes szabad paraméterét — annak árán, hogy így fizikai jelentését (korrelációs hossz) lényegében elvesztette.

NEMADIABATIKUS KONVEKCIÓ Az előzőekben feltettük, hogy a turbulens elemekben az állapotváltozás adiabatikus. Ez valójában nem szükségképpen teljesül, hiszen az elem és környezete sugárzással hőt cserélhet. A sugárzásos hőcsere relatív hatékonyságát a hőegyenlet advektív

tagjához képest a fentebb bevezetett (3.65) Pécelet-szám jellemzi: most $Pe = lw/\kappa$. A hőegyenlet dimenzióanalízisével — a turbulencia hozzávetőleges izotrópiájára vonatkozó fenti 3. feltevésünket is felhasználva — könnyen megmutatható, hogy az általános esetben (4.75) helyett

$$\theta/T = C_T \frac{Pe}{1 + Pe} (\nabla - \nabla_{ad}) \frac{l}{H_P} = C_T (\nabla - \nabla') \frac{l}{H_P} \quad (4.77)$$

ahol az így bevezetett ∇' a turbulens elemekben megvalósuló tényleges (nem adiabatikus) hőgradiens. A $Pe \rightarrow \infty$ adiabatikus limitben (4.77) értelemszerűen visszatér a korábbi (4.75) képletet.

Mivel (4.77) alakilag megegyezik (4.75) összefüggéssel a $\nabla_{ad} \rightarrow \nabla'$ helyettesítéssel, ugyanígy a konvektív fluxus (4.76) kifejezése is ugyanolyan marad, a fenti helyettesítéssel.

Ez a helyettesítés azonban a fluxus kiszámításánál technikai nehézséget jelent, hiszen ∇' (4.77) szerinti definíciójában a Pécelet-számon keresztül fellép a w sebességamplitúdó. Ezért a konvektív fluxus kiszámítása az általános, nemadiabatikus esetben nem egy explicit képlettel, hanem $(\nabla - \nabla')$ mennyiség egy függvényére leszarmaztatott harmadfokú egyenlet megoldása segítségével történik. A módszer mindazonáltal továbbra is algebrai, azaz — más, pontosabb konvekcióelméletekkel ellentétben — nem gyarapítja újabb differenciálegyenletekkel a csillagszerkezeti egyenleteket.

KALIBRÁCIÓ Mivel a zóna határaitól távol az egyetlen, a helyi termodinamikai jellemzők alapján definiálható hosszúságskála H_P , ezért a keveredési hosszt rendszerint

$$l = \alpha_{MLT} H_P \quad (4.78)$$

alakban veszik fel, ahol az α_{MLT} *keveredéshossz-paramétert* állandónak tekintik. Értékének meghatározása céljából különböző α_{MLT} értékekkel kiszámított csillagmodelleket vetnek össze a megfigyelésekkel. A két legfontosabb kritérium:

- Különböző tömegű, kémiaailag homogén csillagmodellek által kirajzolt görbének a szín-magnitúdó diagramon vissza kell adnia a ZAMS megfigyelt pozícióját és alakját.
- A Nap modelljének 4,56 milliárd éves fejlődés után reprodukálnia kell a Nap megfigyelt sugarát.

Az ilyen módon elvégzett kalibrációk α_{MLT} -re többnyire 1,5 és 2 közötti értékekre vezetnek. Ez nyilvánvalóan azt jelenti, hogy az $l \ll H_P$ lokális közelítés biztosan nem teljesül — vagyis az elméletet valójában érvényességi körén kívül alkalmazzuk, amikor csillagkonvekció modellezésére használjuk! Ennek ellenére a keveredéshossz-elmélet a mai napig a legszélesebb körben használt asztrofizikai konvekcióelmélet, s eredményei számos célra kielégítőnek mondhatók.

Mi az oka az inkonzisztens módon alkalmazott elmélet meglepően jó teljesítményének? Ez elsősorban annak tulajdonítható, hogy a konvekció az energiaátvitel rendkívül hatékony módja. A Pécelet-szám a csillagok konvektív zónáiban többnyire óriási, kivéve a késői típusú csillagok konvektív burkának egy vékony felszíni rétegét. Ennek következtében már igen csekély $\Delta\nabla \equiv (\nabla - \nabla_{ad})$ superadiabaticitás is elegendő ahhoz, hogy a konvekció csillag teljes luminozitását elszállítsa. **A csillagok konvektív zónái nagyrészt gyakorlatilag adiabatikus rétegződésűek.** A Nap 200 000 km vastag konvektív zónájának nagy részében pl. $\Delta\nabla \sim 10^{-9}$; csupán a néhány száz km vastag legfelső rétegben haladja meg a 0,1 értéket (*superadiabatikus réteg*). A csillag átlagos rétegződése ilyen körülmények között egy szabad paraméterrel szinte bármilyen konvekcióelmélettel jól leírható — a szabad paraméter kalibrációjával állapítható meg, mennyi a fajlagos entropia konstans értéke a konvektív rétegben, azaz melyik adiabatát kell használni. Korai

típusú csillagok magjában, ahol nincs szuperadiabatikus réteg, a legegyszerűbb modellek esetében a konvekcióelmélet használata teljességgel megkerülhető, és elegendő a megoldást a csillagmagban egy adiabatával helyettesíteni. Konvektív burkokban valamilyen elméletre szükség van a szuperadiabatikus réteg jelenléte miatt, de a réteg vékonysága folytán az átlagos rétegződés kalibrálásához a legegyszerűbb elmélet is megteszi.

A keveredési hossz-elmélet ugyanakkor lényegi korlátainál fogva képtelen arra, hogy megadja

- a turbulens sebesség és hőmérsékletfluktuációk pontos amplitúdóját, hiszen a konvektív fluxus csak $w\theta$ szorzattól függ, w -tól és θ -tól külön-külön nem
- a konvekció részletes geometriai szerkezetét — anizotrópiáját, fel/le aszimmetriáját, topológiáját —, valamint az ezekkel szoros kapcsolatban álló kinetikus energiafluxust (mely a valóságban $l \sim H_P$ miatt igen jelentős)
- a csillag állapotának időfüggését pl. pulzáló konvektív csillag esetén
- a nemlokális effektusokat, mint. pl. az ún. *konvektív túllövést*, vagyis a mozgás behatolását a szomszédos, konvektíve stabil rétegekbe

Az elméletnek születtek olyan heurisztikus kiterjesztései, pl. az ún. “nemlokális keveredési hossz-elmélet”, melyek a fenti problémákat orvosolni próbálják. Valóban kielégítő megoldást ezekre a kérdésekre azonban — a numerikus szimulációk mellett — csak a sokkal részletesebb és egzaktabb *statisztikai konvekcióelméletek* nyújthatnak, melyeket komplikáltságuk miatt eddig csak korlátozottan alkalmaztak az asztrofizikában.

II. függelék

FIZIKAI ÁLLANDÓK ÉS ADATOK

II.1 Az alapvető részecskék táblázata

FERMIONOK (spin = 1/2)

LEPTONOK

<i>Jel</i>	<i>Név</i>	<i>Tömeg</i>	<i>Töltés</i>	<i>Jel</i>	<i>Név</i>	<i>Tömeg</i>	<i>Töltés</i>
e^-	elektron	511 keV	-1	ν_e	e -neutrínó	< 3 eV	0
μ^-	müion	105,66 GeV	-1	ν_μ	μ -neutrínó	< 8,4 eV	0
τ^-	tau	1,7771 GeV	-1	ν_τ	τ -neutrínó	0.03–8.4 eV	0

KVARKOK

<i>Jel</i>	<i>Tömeg</i>	<i>Töltés</i>	<i>Jel</i>	<i>Tömeg</i>	<i>Töltés</i>
d	~ 10 MeV	-1/3	u	~ 5 MeV	2/3
s	75–170 MeV	-1/3	c	~ 1,25 GeV	2/3
b	~ 4,2 GeV	-1/3	t	~ 175 GeV	2/3

BOZONOK (spin = 1)

<i>Jel</i>	<i>Név</i>	<i>Tömeg</i>	<i>Töltés</i>
γ	foton	0	0
W^-	“wuon”	80,22 GeV	-1
Z^0		91,19 GeV	0
g	gluon	0	0

II.2 A HADRONOK TÁBLÁZATA

(A mezonok és hiperonok listája nem teljes.)

MEZONOK (2 kvark, bozonok)

<i>Jel</i>	<i>Név</i>	<i>Összetétel</i>	<i>Tömeg</i>	<i>Töltés</i>	<i>Spin</i>	<i>Élettartam</i>
π^0	pion	$u\bar{u};d\bar{d}$	134,98 MeV	0	0	$8,4 \cdot 10^{-17}$ s
π^+	pion	$u\bar{d}$	139,57 MeV	+1	0	$2,6 \cdot 10^{-8}$ s
K^+	kaon	$s\bar{u}$	493,8 MeV	+1	0	$1,2 \cdot 10^{-8}$ s
K^0	kaon	$d\bar{s}$	497,7 MeV	0	0	4,0 MeV
η		$u\bar{u};d\bar{d};s\bar{s}$	547,3 MeV	0	0	1,2 keV
ρ^+		$u\bar{d}$	770 MeV	+1	1	150 MeV
η_c		$c\bar{c}$	2,98 GeV	0	0	13 MeV

BARIONOK (3 kvark, fermionok)

NUKLEONOK

<i>Jel</i>	<i>Név</i>	<i>Összetétel</i>	<i>Tömeg</i>	<i>Töltés</i>	<i>Spin</i>	<i>Élettartam</i>
p	proton	uud	938,272 MeV	+1	1/2	∞
n	neutron	udd	939,565 MeV	0	1/2	887 s

HIPERONOK

<i>Jel</i>	<i>Név</i>	<i>Összetétel</i>	<i>Tömeg</i>	<i>Töltés</i>	<i>Spin</i>	<i>Élettartam</i>
Λ^0		uds	1,116 GeV	0	1/2	$2,6 \cdot 10^{-10}$ s
Σ^+		uus	1,19 GeV	+1	1/2	$8,02 \cdot 10^{-11}$ s
Ω^-		sss	1,672 GeV	-1	3/2	$8,21 \cdot 10^{-11}$ s

(Nagyon rövid életű részecskék esetében az élettartam helyett a mért energia bizonytalanságát adtuk meg. Ez az élettartammal a Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerinti kapcsolatban áll.)

III. függelék HASZNOS MATEMATIKAI ÖSSZEFÜGGÉSEK

III.1 VEKTOR- ÉS TENZORANALÍZIS

A $\hat{\delta}$ egységtenzor (Kronecker-delta) definíciója:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = k \\ 0 & \text{ha } i \neq k \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Az $\hat{\epsilon}$ Levi-Civita tenzor definíciója:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ha } \{ijk\} \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & \text{ha } \{ijk\} \in \{(3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Einstein-konvenció: egy kifejezés egyes tagjai a bennük ismétlődő indexekre szummázandók. Jelen könyvben a konvenció csak a latin kisbetűs indexekre vonatkozik. A konvenció értelmében egy \mathbf{a} vektorra nyilván

$$\delta_{ij}a_j = a_i \quad (\text{III.3})$$

$$\nabla \mathbf{a} = \partial_i a_i \quad (\text{III.4})$$

$$(\nabla \times \mathbf{a})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j a_k \quad (\text{III.5})$$

Fentiek alapján könnyen beláthatók az alábbi azonosságok:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (\text{III.6})$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{b}(\nabla\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} - \mathbf{a}(\nabla\mathbf{b}) \quad (\text{III.7})$$

Bizonyítás: A bal oldal i komponense (III.6) felhasználásával

$$\epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}a_l b_m) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j(a_l b_m) = \partial_j(a_i b_j) - \partial_j(a_j b_i)$$

ez pedig parciális deriválással épp a (III.7) jobb oldalának i komponense.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a} \quad (\text{III.8})$$

$$\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = (\nabla \circ \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} \quad (\text{III.9})$$

Bizonyítás: A bal oldal i komponense (III.6) felhasználásával

$$\epsilon_{ijk}a_j\epsilon_{klm}\partial_l b_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})a_j\partial_l b_m = a_j\partial_i b_j - a_j\partial_j b_i$$

ez épp (III.9) jobb oldalának i komponense.

A fentiből továbbá, $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ helyettesítéssel és a közvetett függvény deriválási szabályát a^2 -re alkalmazva:

$$\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(a^2/2) - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{a} \quad (\text{III.10})$$

IV. függelék

ÁRAMLÁSTANI KÖZELÍTÉSEK ÉRVÉNYESSÉGI FELTÉTELEI

Tekintsünk egy turbulens fluidumot, melyben tetszőleges a fizikai mennyiség egy \bar{a} átlagérték [vagy: kiinduló érték] és egy a' fluktuáció [vagy: perturbáció] összegére bontható. Az alábbiakban a teljesség kedvéért megvizsgáljuk, hogy egyes, a 4. fejezetben többször használt közelítések pontosan milyen feltételek teljesülése esetén használhatók.

IV.1 FELTÉTELEK A FLUKTUÁCIÓS AMPLITÚDÓKKAL KIFEJEZVE

BOUSSINESQ-KÖZELÍTÉS A 3.2. szakaszban ismertettük az általános baroklin állapotegyenlet egyszerűsítésének egy módját az ún. *Boussinesq-közelítést*. Ez abban áll, hogy az állapotegyenlet (1.22) differenciális alakjában a nyomási tagot elhagyjuk:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha_P dT \equiv -\delta_P \frac{dT}{T}$$

Ez a közelítés folyékony és szilárd közegek esetében mindig jogos, ezekre ugyanis $\delta_T \ll \delta_P$.^{*} Gázokban δ_P és δ_T között általában nincs nagyságrendi különbség, így rájuk a Boussinesq-közelítés nyilván csak akkor használható, ha az állapotváltozás során a relatív nyomásváltozás kicsiny:

$$\Delta P/P \ll \Delta\rho/\rho \sim \Delta T/T. \quad (\text{IV.1})$$

A KONTINUITÁSI EGYENLET KÖZELÍTÉSEI A (3.30) kontinuitási egyenlet dimenzióanalízise a fluktuációk [perturbációk] τ időskálája [periódusa], l léptéke [hullámhossza] és v sebességamplitúdója segítségével

$$\underbrace{\partial_t \rho'}_{\sim \rho'/\tau} + \underbrace{\mathbf{v} \nabla \rho}_{\sim \rho v/H_\rho} + \underbrace{\rho \partial_x \mathbf{v}_x}_{\sim \rho v/l} + \rho \partial_y \mathbf{v}_y + \rho \partial_z \mathbf{v}_z = 0 \quad (\text{IV.2})$$

Látható, hogy az első tag a harmadikhoz képest elhanyagolható, vagyis a

$$\nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

anelasztikus közelítés használható, ha

$$\rho'/\rho \ll \text{St} \quad (\text{IV.3})$$

Itt $\text{St} = \tau v/l$ az ún. *Strouhal-szám*. Jellemző értéke kifejlett turbulenciára 1 nagyságrendű, míg a hullámmélethez és a lineáris stabilitásvizsgálatban szereplő kicsiny perturbációkra $\text{St} \ll 1$.

Ezen túlmenően a második tag is elhanyagolható a harmadikhoz képest, vagyis használhatjuk a

$$\nabla \mathbf{v} = 0$$

inkompresszibilis közelítést, ha (IV.3) mellett

$$l/H_\rho \ll 1 \quad (\text{IV.4})$$

is teljesül.

^{*}Folyadékokra $\delta_P \sim 0.01-0.1$, $\delta_T \sim 10^{-5}$; szilárd anyagokra $\delta_P \sim 0.01$, $\delta_T \sim 10^{-7}-10^{-6}$.

IV.2 A FLUKTUÁCIÓS AMPLITÚDÓK BECSLÉSE

Vonjuk ki a (3.75) mozgásegyenletből annak átlagát, képezzük a kapott fluktuációs egyenlet divergenciáját és az eredményt rendezzük P' -re:

$$\underbrace{\nabla^2 P'}_{\sim P'/l^2} = \underbrace{\partial_t^2 \rho'}_{\lesssim \rho'/\tau^2} - \underbrace{\nabla^2(\rho \mathbf{v} \circ \mathbf{v})'}_{\sim \rho v^2/l^2} + \underbrace{\nabla(\rho' \mathbf{g})}_{\sim \rho' g/l} \quad (\text{IV.5})$$

Ez alakilag egy Poisson-egyenlet, mely a nyomásfluktuációk, mint skalártér forrásait rendre a hanghullámokban, a turbulens mozgások összenyomó/tágító hatásában, illetőleg a felhajtóerőben jelöli meg.

Az egyenletet P -vel osztva, és kihasználva, hogy (4.7) szerint $P \sim c_s^2 \rho$, továbbá felhasználva a Mach-szám $M = v/c_s$ definícióját, H_P (3.85) kifejezését, és azt, hogy $\rho \geq 0$, így átlag körüli fluktuációja legfeljebb 1 nagyságrendű:

$$\frac{P'}{P} \sim M^2 + \frac{\rho'}{\rho} \frac{l}{H_P}. \quad (\text{IV.6})$$

Ezt az összefüggést használjuk fel a fluktuációs amplitúdók becslésére. Három esetet vizsgálunk meg.

(1) Rétegzetlen eset ($H_P \rightarrow \infty$)

Ekkor (4.9) szerint $P' \sim c_s^2 \rho'$, így (IV.6) alapján

$$\frac{p'}{p} \sim \frac{\rho'}{\rho} \sim \frac{T'}{T} \sim M^2 \quad (\text{IV.7})$$

A Boussinesq-közelítés tehát rétegzetlen gázra érvénytelen; az anealastikus (és egyben az inkompresszibilis) közelítés viszont használható szubszonikus turbulencia leírására ($M^2 \ll 1$), illetve a lineáris elméletben $M^2 \ll \text{St}$ esetén, vagyis ha (mint a 4.6. szakaszban) nem zavar minket, hogy kizárja a hanghullámokat.

(2) Instabil rétegződés

A keveredéshossz-elméletben vázolt gondolatmenet alapján ekkor (4.74) szerint

$$v^2 \sim \frac{\rho'}{\rho} gl, \quad \text{amiből} \quad M^2 \sim \frac{\rho'}{\rho} \frac{l}{H_p},$$

vagyis (IV.6) jobb oldalán mindkét tag hasonló nagyságrendű.

Eszerint a Boussinesq-közelítés érvényességének szükséges és elégséges feltétele konvektíve instabil rétegben $l/H_P \ll 1$, vagyis az ún. "lokális közelítés".

Az anelasztikus közelítés feltétele viszont $M^2 H_p/l \ll 1$. A csillagok belsejében M^2 általában igen kicsiny, tehát az anelasztikus közelítés jól használható a konvektív zónákban az áramlások leírására.

(3) Stabil rétegződés

Ilyenkor a fluidumelemek rezgést végeznek egyensúlyi helyzetük körül. $l \lesssim H_P$ esetén a (4.75) képlethez vezető gondolatmenethez hasonlóan

$$\rho'/\rho \sim \Delta \nabla_\rho l/H_P,$$

ahol $\Delta \nabla_\rho$ deifnícója $\Delta \nabla$ -éval analóg, csak benne T helyett ρ szerepel.

A v sebességamplitúdó meghatározására most nem használható a (4.74) keveredéshossz-formula. A Boussinesq-közelítés érvényességének ezért a (IV.6) jobb oldalán álló két tagnak megfelelően kettős feltétele lesz:

$$M^2/|\Delta \nabla_\rho| \ll l/H_p \ll 1$$

Az anelasztikus közelítés viszont akkor teljesül, ha

$$\Delta \nabla_\rho l/H_p \ll 1 \quad \text{és ugyanakkor} \quad M^2 \ll 1$$

Csillagbelsőben mindkét közelítés feltételei jól teljesülnek, csillaglégkörökben viszont egyiké sem.